This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

S173.2

HARVARD COLLEGE LIBRARY

BOUGHT FROM THE INCOME OF THE FUND
BEQUEATHED BY
PETER PAUL FRANCIS DEGRAND
(1787-1855)
OF BOSTON

FOR FRENCH WORKS AND PERIODICALS ON THE EXACT SCIENCES
AND ON CHEMISTRY, ASTRONOMY AND OTHER SCIENCES
APPLIED TO THE ARTS AND TO NAVIGATION

MÉMOIRES SCIENTIFIQUES.

Tome I.

BALISTIQUE.

PAUL DE SAINT-ROBERT.

MÉMOIRES SCIENTIFIQ

RÉUNIS ET MIS EN ORDRE.

TOME I.

BALISTIQUE.

TURIN,
VINCENT BONA, IMPRIMEUR DE S. M.
Rue Charles-Albert, N° 1.

1872.

PAUL DE SAINT-ROBERT.

MÉMOIRES SCIENTIFIQUES,

RÉUNIS ET MIS EN ORDRE.

TOME I.

BALISTIQUE.

TURIN,
VINCENT BONA, IMPRIMEUR DE S. M.,
Rue Charles-Albert, N° 1.

1872.

S 193.2

HARVARD COLLEGE LIBRARY
DEGRAND FUND
Dec. 5, 1924 B
(3 vols)

AVERTISSEMENT.

De 1855 à 1861, j'ai publié tantôt en italien, tantôt en français plusieurs mémoires touchant la Balistique. Bien que ces mémoires aient passé presque inaperçus, j'ose croire qu'ils n'ont pas été inutiles, puisque je vois que des auteurs qui ont traité de ces matières après moi n'ont pas dédaigné d'y puiser largement, en ne me citant pas toujours. Je sais bien que, dans la république des sciences, on ne se fait pas faute de *prendre*, selon le mot de Molière, *son bien partout où on le trouve;* mais au moins faudrait-il dire où on le prend.

Ces mémoires étant devenus rares, je me suis décidé à en faire une seconde édition. Malgré le temps qui s'est écoulé depuis qu'ils ont paru, la solution rigoureuse du problème balistique est restée à peu près

au même point où je l'ai portée. C'est pourquoi j'ai cru pouvoir réimprimer mes mémoires sans y apporter d'autre changement que de les écrire tous en une même langue. Les notes et les additions, peu nombreuses d'ailleurs, que j'y ai ajoutées sont indiquées par la date.

Comme je me propose de publier, par la suite, les autres mémoires que j'ai fait paraître sur différents sujets scientifiques, j'ai mis en tête de ce volume le titre de tome 1^er^.

On remarquera que dans ces mémoires sur la Balistique, je me suis tenu à un point de vue plus élevé que celui d'une hypothèse particulière sur la forme de la fonction qui exprime la résistance du milieu; et que mes raisonnements s'appliquent non-seulement aux fonctions susceptibles d'une définition analytique, mais même aux fonctions qui ne peuvent être données que par l'expérience. J'évite de la sorte ces formules empiriques dont on fait, à mon avis, un abus regrettable dans les écrits récents sur la Balistique, formules qu'on peut comparer à des lits de Procruste où l'on fait entrer de force les résultats fournis par l'expérience directe. Pour ma part, je pense qu'on ne saurait trop s'élever contre l'abus des formules empiriques.

Assurément, dans certains cas, elles peuvent rendre des services; mais il ne faut les admettre qu'avec précaution et comme un pis-aller, et ne jamais préférer un empirisme grossier, qui vous conduit en tâtonnant, à une théorie générale qui éclaire votre chemin.

Les mémoires dont ce volume se compose sont réunis en trois groupes.

Le premier groupe comprend un seul mémoire où je traite du mouvement des projectiles sphériques, dans les milieux résistants, d'une manière indépendante de toute hypothèse sur la forme de la fonction qui exprime la résistance; j'y discute la trajectoire en admettant seulement que la résistance croît ou décroît avec la vitesse; j'y ramène aux quadratures les équations du mouvement, dans le cas de la résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse, plus une constante; j'y propose diverses méthodes d'approximation pour calculer le mouvement dans les milieux dont la résistance peut, ou non, s'exprimer par les signes de l'algèbre ou par d'autres symboles d'une valeur mathématiquement définie; j'y donne enfin les formules de la Balistique ordinaire, dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Le second groupe comprend trois mémoires sur le

mouvement des projectiles oblongs lancés par les armes à feu rayées. Dans le premier, je fais voir que les formules ordinaires de la Balistique, établies pour les projectiles sphériques, ne sont pas applicables au tir des projectiles allongés; en outre j'y résous le problème du mouvement d'un cylindre droit tournant autour de son axe, lancé dans l'air. Dans le second mémoire, je complète la solution de ce problème, et je l'étends à un solide de révolution tel que les projectiles de l'artillerie; j'y explique le double mouvement de translation et de rotation des projectiles, et je propose une méthode pour en calculer la trajectoire par points, quelle que soit la loi de la résistance. Le but du dernier mémoire de ce groupe est de présenter sous une forme élémentaire, autant que le comporte la nature du sujet, la théorie du mouvement des projectiles lancés par les armes à feu rayées.

Le troisième groupe se compose de deux mémoires qui regardent les projectiles de forme quelconque. Le premier mémoire traite de la similitude des trajectoires que décrivent les projectiles dans les milieux résistants. C'est une généralisation de ce que j'en ai dit dans le dernier mémoire du groupe précédent.

Je me permets de revendiquer ici la priorité de cette théorie de la similitude des trajectoires. Les auteurs qui en ont traité après moi citent Galilée et Newton qui n'ont pas songé aux trajectoires des projectiles ; mais ils oublient de me citer. Assurément, la similitude des trajectoires est implicitement contenue dans le théorème de Newton sur la similitude des mouvements ; mais la difficulté était d'avoir ce théorème présent à l'esprit et de savoir en dégager la similitude des trajectoires. C'est ce que personne n'avait fait avant moi (*).

Le dernier mémoire contient une exposition élémentaire des effets que produit sur le tir la rotation de la terre. Ce mémoire a été reproduit, comme le précédent, en citant Poisson qui l'a traité d'une tout autre manière, mais en se gardant bien de citer mon nom.

A propos de ces appropriations des travaux d'autrui sans en avouer la source, qu'on me permette de citer les paroles que M. le colonel Delobel écrivait, en 1854, dans son excellente *Revue de Technologie militaire* : « Ecrit-on sur une théorie nouvelle ? On se

(*) Voyez à ce sujet une lettre que j'ai adressée au directeur du *Spectateur militaire* (Livraison du 15 avril 1867).

« complaît à remonter bien haut dans les annales du « passé pour y découvrir le germe de l'œuf qui vient « d'éclore; on pousse même envers les morts le res- « pect de la propriété intellectuelle jusqu'au point de « leur attribuer souvent une foule d'idées qui ne leur « sont probablement jamais venues et d'inventions « qu'ils n'ont assurément jamais faites; mais loin d'en « agir de même envers les vivants qui ont couvé avant « vous, plus que vous et peut-être mieux que vous, « cet œuf dont vous proclamez l'éclosion sous votre « plume, c'est à peine si vous daignez rappeler les « noms des contemporains qui vous ont fourni les « matériaux que vous mettez en œuvre. Il nous sem- « ble cependant que le précepte évangélique qui pres- « crit de rendre à César ce qui est à César, s'ap- « plique tout aussi bien aux vivants qu'aux morts, et « que les lignes de douanes, les différences d'idio- « mes, etc., n'autorisent personne à transgresser ce « précepte de justice absolue » (*).

On me pardonnera d'être entré dans ces questions personnelles; mais moins on est riche, plus on tient à son bien et plus on cherche à le défendre.

(*) T. 1, p. 361.

Quoique les mémoires que contient ce volume paraissent, au premier aspect, assez disparates, ils n'en forment pas moins une espèce de Cours de Balistique. Il suffirait de développer davantage quelques parties, de combler quelques lacunes, de ménager des transitions pour en faire un véritable traité.

Puissent ces mémoires, même dans leur état actuel, fournir d'utiles secours aux personnes qui s'occupent de Balistique, et surtout aux jeunes officiers studieux !

Je ne saurais terminer cet Avertissement sans adresser mes remercîments à M. le baron Rodini, major d'artillerie, qui a bien voulu revoir les épreuves des formules analytiques.

Turin, mai 1872.

PAUL DE SAINT-ROBERT.

DU MOUVEMENT

DES

PROJECTILES SPHÉRIQUES.

ANALYSE

DU MÉMOIRE

SUR LE MOUVEMENT DES PROJECTILES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS;

PAR

M. ADOLPHE PARODI,

INSPECTEUR DU GÉNIE CIVIL, ETC. (1)

Parmi les travaux les plus récents sur la balistique, nous devons signaler comme digne d'un très-vif intérêt, un Mémoire italien ayant pour titre : *Del Moto de' proietti ne' mezzi resistenti* (Du Mouvement des projectiles dans les milieux résistants), qui vient de paraître dans le tome XVI de la II série des *Mémoires de l'Académie de Turin.*

M. le comte Paul de Saint-Robert, major d'artillerie de l'armée sarde, auteur de cet écrit, y a déployé une rare sagacité; et l'esprit de rigueur et de méthode qui le

---

(1) Cette Analyse a été publiée en 1855, dans le *Journal des Armes spéciales et de l'État-major*, 4e série, T. III, p. 453. Paris, 1855.

guide dans l'examen du sujet qu'il se propose est peut-être sans exemple dans la plupart des traités que l'on possède sur cette matière.

En nous proposant de donner ici une analyse succincte de ce beau travail, nous pensons faire une chose utile aux jeunes officiers qui n'auraient peut-être pas l'occasion de consulter un ouvrage écrit dans une langue moins répandue et qui, toutefois, pourrait leur ouvrir le champ pour des recherches ultérieures.

Nous adopterons dans cet aperçu l'ordre même suivi par l'auteur dans l'exposition de ses principes.

PRÉFACE. — L'auteur commence par résumer dans la préface l'état actuel de la question, dans l'hypothèse de résistance posée par Newton en indiquant les travaux d'Euler, de Robins et de Hutton qui, en modifiant cette hypothèse reconnue insuffisante, ont donné lieu aux recherches de tant de géomètres. Il cite ensuite les résultats obtenus par M. Piobert et adoptés par M. Didion dans son *Traité de Balistique,* en remarquant toutefois que la méthode indiquée par celui-ci pour calculer la trajectoire ne paraît pas assez satisfaisante.

Tout en faisant observer que, malgré tous ces travaux, il reste encore beaucoup d'incertitude sur la véritable loi de la résistance, il en conclut qu'il faut étudier la question sous un point de vue plus général, avant d'adopter une hypothèse particulière sur la résistance des milieux. Il serait, dit-il, nécessaire de rechercher en premier lieu si les propriétés de la trajectoire connues dans l'hypothèse ordinaire de la résistance proportionnelle au carré de la

vitesse demeurent les mêmes, ou bien de quelle manière elles se modifient en changeant d'hypothèse; en second lieu, faudrait-il donner une méthode simple et facile pour déterminer, par approximation et aussi près qu'on le peut exiger, les éléments de la trajectoire que l'on ne pourrait pas obtenir sous forme finie.

La solution de ces deux questions est savamment développée dans six différents chapitres, qui ont respectivement pour objet :

1° Les équations générales du mouvement;
2° Mouvement rectiligne;
3° Discussion de la trajectoire;
4° Cas réductibles aux quadratures;
5° Méthodes d'approximation;
6° Application au tir des projectiles.

Une Note fournit à la fin la comparaison des différentes méthodes.

Chapitre I. — L'auteur rappelle d'abord l'énoncé de la question générale et le double mouvement de translation et de rotation qu'il s'agirait de déterminer; mais comme la complication des circonstances physiques qui donnent naissance à la résistance du milieu ne saurait, dans l'état actuel de nos connaissances, permettre de conserver à la question toute sa généralité, il admet, sans faire d'avance aucune restriction sur l'intensité de la résistance, que son effet se réduit :

1° A une force directement opposée à la direction de la vitesse, laquelle est la résistance proprement dite, qu'on suppose généralement exprimée en fonction de la vitesse;

2° A une perte de poids du projectile précisément égale au poids de la masse du fluide déplacé;

3° A la présence d'une proue et d'une poupe fluides qui accompagnent le corps dans son mouvement.

Il suppose ensuite que le mobile se réduise à un simple point matériel, où toute la masse du corps, ainsi que les forces qui l'animent, se trouvent concentrées en faisant ainsi abstraction du mouvement de rotation. A l'égard de la masse fluide qui précède et suit le corps dans son mouvement, l'auteur s'appuie sur les expériences de Dubuat qui paraissent indiquer que le volume de la portion de fluide entraînée par une sphère est constamment à peu près égal aux six dixièmes du volume de ce corps.

L'accord qui paraît régner entre ces résultats et ceux qui ont été obtenus postérieurement sur le mouvement d'un pendule par Bessel, Sabine, Baily, et les déductions analytiques de Bessel lui-même, de Poisson et de Plana, ont permis à l'auteur de tenir compte de cette circonstance dans le mouvement des projectiles, ce qui n'avait pas encore été fait.

La question étant ainsi posée, l'auteur arrive promptement aux équations générales, par la considération des forces normales et des forces tangentielles; la simplicité des formules auxquelles il arrive, et qui les rend propres aux discussions ultérieures, mérite d'être remarquée. Il termine ce chapitre en faisant observer qu'au moyen des équations obtenues, on peut toujours résoudre le problème général que voici: « Des trois choses suivantes, la loi de la résistance du milieu, la trajectoire, la loi de la vitesse du mobile, une étant donnée, déterminer les deux autres. » Après quoi il rappelle les formules par lesquelles Newton

et ensuite Lagrange ont présenté la solution de la question plus simple où, la trajectoire étant donnée, il s'agit de trouver les autres éléments du mouvement.

CHAPITRE II. — En traitant d'abord du mouvement rectiligne, l'auteur rend plus simple et plus claire la discussion de la trajectoire curviligne qui fait l'objet du chapitre suivant, mais ce n'est pas là le seul avantage de sa méthode; par cette marche il arrive à des conséquences assez singulières, dont quelques-unes même paradoxales, qui n'avaient pas encore été signalées.

Nous indiquerons rapidement quelques-uns de ces résultats remarquables.

Le mouvement rectiligne présente deux cas, celui où le poids du corps est parfaitement contrebalancé par la résultante des pressions statiques du milieu, ou bien celui où le corps se meut verticalement.

Comme il est facile de le penser, le premier cas ne peut offrir aucune difficulté sous le rapport analytique et se réduit immédiatement aux quadratures; mais, malgré cela, tant qu'on n'assigne pas à la résistance une loi particulière, il sera difficile d'en faire ressortir des conséquences assez générales; pour atteindre ce but, autant que possible, l'auteur considère le trajet parcouru par le mobile et le temps employé à le parcourir, puis il discute le cas où ces deux éléments prennent des valeurs singulières.

Il trouve, par exemple, que si pour de très-petites vitesses la résistance décroît moins rapidement que la première puissance de la vitesse, le mobile s'arrêtera au bout d'un espace limité et d'un temps fini; et comme l'expérience

prouve qu'un corps en mouvement sur un plan horizontal, ou flottant à la surface d'un liquide stagnant, finit toujours par arriver au repos, il en conclut que l'on peut admettre dans ce cas que la résistance, exprimée en fonction de la vitesse, renferme au moins un terme affecté d'une puissance de celle-ci inférieure à la première.

Il trouve de même que si la résistance pour de très-petites vitesses décroît moins rapidement que la première puissance de la vitesse, tandis que pour des vitesses très-grandes elle croît plus rapidement que la deuxième puissance de la vitesse, le mobile s'arrêtera toujours au bout d'un espace fini et après un temps fini, lors même que la vitesse initiale deviendrait infinie.

Ce dernier résultat paraîtrait paradoxal si on ne se rappelait pas que, lorsque la vitesse est infinie, la résistance l'est aussi.

Le cas du mouvement vertical conduit l'auteur à des conséquences analogues : il trouve ainsi que, pour de très-grandes vitesses si la résistance du milieu croît plus rapidement que le carré de la vitesse, il y aura une limite au-delà de laquelle le mobile ne pourra pas s'élever, même en supposant infinie la vitesse initiale. — De là l'auteur se trouve conduit à penser que, dans les limites mêmes de notre atmosphère, on peut assigner une hauteur au-delà de laquelle le simple effet d'une impulsion initiale ne pourrait porter un projectile. — Pour s'en assurer, il établit dans une note l'équation complète du mouvement vertical ascendant, en tenant compte de la diminution de la force de gravité et de la densité de l'air ; et comme l'intégration complète et rigoureuse présenterait des difficultés

insurmontables tant que la loi de résistance conserve toute sa généralité, l'auteur a recours à un artifice ingénieux qui lui permet de confirmer la conséquence qu'il avait soupçonnée.

Cet artifice consiste à partager l'étendue de l'intégration en deux intervalles et à négliger dans le premier intervalle une partie des termes de l'équation, tandis que dans le deuxième intervalle on rétablit les termes négligés et on en omet au contraire d'autres qui avaient été conservés; ensuite on détermine le partage des deux intervalles de manière que la somme des deux résultats partiels soit un minimum, chacun des deux étant supérieur à ce qu'il devrait être.

Mais il ne se contente point de cela, car en adoptant la loi de résistance proposée par M. Piobert et exprimée par deux termes, l'un affecté du carré et l'autre du cube de la vitesse, il arrive à démontrer qu'un boulet de 24 ne pourrait atteindre la hauteur de 5812 mètres; hauteur bien moindre que celle de quelques montagnes du globe et même que celle où quelques aérostats se sont élevés.

Nous devons ajouter que l'on trouve dans ce chapitre quelques applications où le secours des intégrales définies permet de donner aux résultats une forme explicite et finie, et nous pensons que ce premier exemple fourni par l'auteur pourrait être heureusement imité et étendu.

L'examen du mouvement vertical descendant ne manque pas de donner lieu à des considérations assez délicates, dont quelques-unes se rapportent à la distinction des cas où la vitesse *terminale*, comme il l'appelle d'après Huyghens, est nulle ou finie.

CHAPITRE III. — L'auteur fait observer que la nature de la courbe décrite par un mobile, dans un milieu résistant, dépend essentiellement de la nature de la résistance, à l'égard de laquelle, dans l'état actuel de la science, tout ce qu'il y a de plus vraisemblable se réduit à admettre que cette force est une fonction de la vitesse qui croît ou décroît avec celle-ci.

Ainsi donc il semble naturel de n'admettre pour le moment aucune hypothèse particulière à l'égard de la résistance, et d'entreprendre la discussion de la trajectoire d'une manière tout à fait générale.

Pour atteindre ce but, l'auteur distingue d'abord le cas où la fonction de la vitesse qui exprime la résistance, rapportée à l'unité de masse, demeure supérieure à la force de gravité corrigée, ou bien lui est égale, ou lui est inférieure lorsque la vitesse est égale à zéro.

Pour suivre l'auteur dans ses recherches et donner une idée assez nette des résultats auxquels il se trouve conduit, il serait nécessaire d'emprunter quelque chose au langage analytique, mais la forme que nous avons adoptée ne nous le permet pas. Il nous suffira donc d'indiquer que dans chacune de ces trois hypothèses l'auteur se propose : 1° de connaître la marche que suivent les valeurs de l'angle tangentiel, de la vitesse du mobile, de ses coordonnées, et de l'arc, comparées aux valeurs successives que l'on peut attribuer au temps ; 2° de déterminer ensuite si ces éléments diminuent ou augmentent, ou s'ils ont des alternatives en passant par des valeurs maxima et minima ; 3° si la courbe s'étend au-dessous de l'origine, ou, ce qui est la même chose, si elle est réelle pour des valeurs

négatives du temps; 4° enfin il se propose de rechercher ce qui arrive au sommet, aux extrémités, aux autres points singuliers de la courbe; si elle est, ou non, douée d'asymptotes; en un mot il pousse la discussion aussi loin qu'il est possibile sans particulariser la loi de la résistance du milieu.

On sent combien cette tâche doit être difficile, attendu que les équations ne sont pas, comme dans le cas du mouvement rectiligne, réductibles aux quadratures; les différents artifices d'analyse au moyen desquels l'auteur surmonte ces difficultés sont très-remarquables et plusieurs même tout à fait nouveaux.

Pour faire comprendre plus nettement le but que l'auteur s'est proposé dans ce chapitre nous indiquerons une partie des conséquences qu'il en a tirées, dont quelques-unes, déjà connues dans quelque hypothèse particulière de résistance, n'avaient jamais été généralisées, tandis que d'autres sont entièrement dues à l'auteur.

1° La courbe réellement parcourue par le mobile se compose généralement de deux branches continues, l'une dite ascendante et l'autre descendante, mais toutefois la branche ascendante se prolonge en sens contraire au-dessous de l'origine et répond à des valeurs négatives du temps; de telle sorte que si le mobile partait d'un point quelconque de cette partie de la courbe, avec une vitesse initiale dirigée suivant la tangente et fournie par les mêmes formules qui donnent la vitesse en un point quelconque de la courbe réellement décrite, la trajectoire sur laquelle le mobile persisterait serait encore la même, et on n'aurait fait autre chose que reculer l'origine. Ainsi, en parlant

des éléments qui répondent à des temps négatifs, on devra entendre les valeurs qui répondraient à ces éléments, si le mobile partait d'un point plus bas avec la vitesse convenable pour que la trajectoire demeurât la même.

2° La vitesse du mobile qui répond à un temps négatif, tend à devenir infinie; au contraire, dans la branche qui répond au temps positif, c'est-à-dire dans celle que le mobile décrit réellement, la vitesse converge vers zéro, si la résistance (comme nous l'avons distinguée ci-dessus) pour des vitesses nulles est égale ou plus grande que la force de gravité corrigée; elle tend au contraire vers une limite finie supérieure à zéro, quand cette résistance devient plus petite que la gravité pour des vitesses nulles; mais dans ce cas la vitesse passerait par un minimun entre ses deux valeurs extrêmes.

3° Si l'on considère l'inclinaison de la courbe, on voit que l'extrémité de la branche descendante est toujours verticale, et que l'extrémité de la branche située au-dessous de l'origine est verticale seulement quand la fonction qui exprime la résistance est d'un degré égal à zéro, mais que dans tous les autres cas la tangente extrême est oblique à l'horizon.

4° Le temps négatif qui répond à l'extrémité inférieure de la branche négative est infini, si la fonction de la résistance est d'un degré inférieur ou égal au premier; mais, si ce degré est supérieur au premier, le temps est alors fini; quant au temps nécessaire pour que le mobile arrive à l'extrémité de la trajectoire qu'il parcourt, il reste fini, quand la résistance, rapportée à l'unité de masse, demeure supérieure à la force de gravité, quelque petite

que soit la vitesse; il est, au contraire, infini, si la résistance peut devenir inférieure à la gravité.

5° La longueur de la branche négative est infinie quand la fonction qui exprime la résistance est de degré égal ou inférieur au second; elle est au contraire finie quand ce degré de la résistance est supérieur au deuxième. La longueur totale de la branche réellement parcourue est infinie, si la résistance est inférieure à la force de gravité pour des vitesses insensibles; elle est au contraire finie, si la résistance, pour des vitesses insensibles, est supérieure à la force de gravité.

6° La branche descendante, quand elle est infinie, est toujours douée d'une asymptote verticale.

La branche négative, au contraire, n'a d'asymptote proprement dite que lorsque la fonction qui exprime la résistance est de degré supérieur au premier, mais tout au plus égal au deuxième.

Il serait assez intéressant de suivre l'auteur dans d'autres rapprochements qui tendent à compléter la discussion de la trajectoire; il nous suffira d'ajouter qu'il trouve, comme l'on devait s'y attendre, d'après les remarques sur le mouvement vertical, que, si la résistance de l'air croît plus rapidement que le carré de la vitesse, un projectile, quoique lancé avec une impulsion infinie, ne saurait dépasser les bornes de notre atmosphère, sous quelque inclinaison qu'il soit dirigé; et que, dans ce cas, la courbe géométrique tout entière, y compris la partie négative, se présenterait composée de deux branches continues, l'une ascendante et d'une longueur finie, et l'autre descendante et d'une longueur infinie et douée d'une asymptote verticale.

L'auteur termine ce chapitre par des réflexions qui achèvent de donner toute la rigueur possible aux raisonnements dont il a fait usage.

CHAPITRE IV. — L'auteur s'occupe de quelques cas dans lesquels les équations du mouvement des projectiles peuvent se ramener aux quadratures. Bernoulli, comme l'on sait, a supposé la résistance proportionelle à une puissance quelconque de la vitesse; D'Alembert y ajoute un terme constant et montre en outre que l'intégration réussissait également si, dans cette expression, l'on substituait à la puissance quelconque de la vitesse son logarithme.

Nous ne suivrons pas l'auteur dans ses déductions analytiques ni dans la comparaison des résultats qu'il obtient en partant de ces hypothèses: quoiqu'il s'agisse de questions connues, on n'y remarque pas moins des réflexions nouvelles et intéressantes, mais qui ne pourraient être reproduites sans le secours du langage analytique.

Toutefois, nous ne saurions passer sous silence l'examen des cas où, en adoptant pour la résistance la première des expressions de D'Alembert, on peut obtenir sous forme finie tantôt l'un, tantôt l'autre des éléments du mouvement; il y a dans cette discussion plusieurs points essentiels, et nous pensons que les formules, telles qu'elles sont, mériteraient de fixer l'attention des jeunes officiers qui, par des hypothèses partielles plus ou moins rapprochées de la nature des choses, tâchent de représenter des expériences déjà exécutées sur le tir des projectiles.

Une observation singulière explique pourquoi, lorsque le terme constant est rationnel et différent de zéro, ou de

l'unité positive ou négative, les coordonnées de la courbe s'obtiennent sous formes finies, tandis que, lorsque la résistance est simplement proportionnelle au carré, cela n'arrive pas.

Nous devons de même remarquer une frappante analogie que l'auteur a reconnue en considérant le mouvement d'un même projectile dans deux milieux dont la résistance est exprimée par un terme constant, qui est commun aux deux milieux, et par un autre terme qui est pour le premier proportionnel à la vitesse et pour le second, proportionnel au carré de la vitesse, et en comparant ces deux mouvements à celui que prendrait le même mobile dans un troisième milieu dont la résistance serait constante.

Si sur la première trajectoire et la troisième on prend deux arcs également inclinés à leurs extrémités respectives, on trouve une relation très-simple entre les temps employés à les décrire, et une relation parfaitement analogue se rencontre en comparant la longueur de ces arcs dans la deuxième et la troisième trajectoire. Cette remarque singulière est due à l'auteur et nous pensons que dans quelques applications elle pourrait être utile.

Chapitre V. — Les considérations renfermées dans le chapitre précédent ayant fait voir le petit nombre des cas où les équations du mouvement sont intégrables, l'auteur fait observer que les théories connues permettent toujours de calculer les valeurs numériques d'une fonction quelconque, lorsqu'elle n'est donnée que par des équations différentielles qui ne sont point intégrables, et que l'on peut,

dans chaque cas, assigner les limites de l'erreur, ainsi que Cauchy l'a fait voir.

Pour appliquer cette méthode, il choisit l'équation différentielle du premier ordre entre la vitesse et l'angle tangentiel, telle qu'il l'a déjà présentée; mais, au lieu d'en tirer immédiatement la valeur de la différentielle de la vitesse en fonction de cette même vitesse et de l'angle pour en avoir les accroissements successifs, il prépare d'une manière fort ingénieuse cette équation, en substituant à ces variables deux variables auxiliaires, en sorte que le rapport de leurs accroissements respectifs demeure à peu près constant ou varie du moins entre des limites assez resserrées.

Ayant ainsi déterminé les valeurs numériques de la vitesse qui correspondent aux valeurs numériques de l'angle tangentiel, il montre comment, au moyen de ces valeurs, la détermination de tous les autres éléments qui se rapportent à la question, dépend seulement de la méthode ordinaire des quadratures.

Mais ce qui est surtout remarquable, c'est l'observation faite par l'auteur que la méthode qu'il vient d'exposer s'applique également, soit que la résistance du milieu se trouve exprimée par une fonction analytique connue, ou qu'elle soit donnée par une table de valeurs numériques qui correspondent à une série régulière des valeurs de la vitesse, telle qu'on pourrait la dresser d'après un nombre convenable d'expériences.

A cette méthode il ajoute ensuite une élégante construction graphique semblable à celle qu'avait déjà donnée Poncelet, et dont l'idée primitive est due, je crois, à Euler.

Une deuxième méthode d'approximation indiquée par l'auteur consiste à substituer à la fonction qui représente la résistance une autre fonction dont la valeur s'en écarte peu entre certaines limites. Celle que l'auteur adopte se réduit à remplacer sous le signe de la fonction la vitesse du mobile par sa composante horizontale affectée d'un coefficient constant, et à diviser la fonction ainsi modifiée par ce même coefficient multiplié par le cosinus de l'angle tangentiel.

Tout en indiquant cette méthode, il fait voir qu'elle ne pourrait convenir qu'au tir peu élevé et qu'il serait toujours préférable d'adopter la première méthode; il remarque en outre que celle qu'a donnée M. Didion revient au fond à cette deuxième méthode et qu'elle partage précisément les mêmes défauts.

Le chapitre est terminé par une troisième méthode d'approximation, celle du développement en séries: plusieurs auteurs avaient déjà donné pour cela des séries assez multipliées, mais toujours dans des hypothèses particulières; l'auteur présente ici les valeurs de l'ordonnée, de l'arc, de la vitesse et du temps, développées en séries suivant les puissances ascendantes de l'abscisse, quelle que soit la fonction qui représente la résistance.

Quoiqu'il ne s'agisse que d'une simple application du théorème de Maclaurin, c'est cependant la première fois, à ce que nous croyons, que de tels résultats plus généraux ont été consignés.

Il montre au reste le peu de convergence de ces séries quand il s'agit du tir élevé et le moyen de s'en servir dans

ce cas, tandis que pour le tir peu élevé elles sont très-suffisantes.

CHAPITRE VI. — Pour appliquer les principes précédemment exposés au tir des projectiles de l'artillerie, l'auteur rappelle les efforts qui ont été faits jusqu'ici, soit par les géomètres, soit par les artilleurs, pour déterminer la résistance des milieux. Il ajoute les résultats et les hypothèses admises, et il en conclut que, pour les projectiles, la résistance des milieux doit être mieux représentée par trois termes, dont le premier est constant, le deuxième proportionnel au carré de la vitesse, et l'autre au bicarré, et que, pour le mouvement des projectiles dans l'air, le terme constant disparaissant, on se trouve conduit à admettre l'hypothèse proposée par Euler. Il ajoute ensuite la comparaison des expressions données par Newton, Tempelhoff, Borda, Lombard, Euler, Duchemin, Didion et Giulio.

Après avoir fixé la valeur des coefficients numériques qui doivent entrer dans l'expression de la résistance adoptée par lui, l'auteur fait observer qu'ils devraient être sensiblement réduits pour des projectiles non sphériques, semblables à ceux qu'on adopte aujourd'hui; mais que le manque d'expériences à ce sujet ne permet pas, pour le moment, de faire les réductions convenables.

Après cela, l'auteur expose l'application de ses principes aux trois problèmes suivants :

1° Déterminer la pénétration d'un projectile dans un milieu solide;

2° Déterminer le mouvement d'un projectile dans le tir de plein-fouet;

3° Déterminer le mouvement d'un projectile dans le tir courbe.

Dans la solution du premier problème, il admet que la résistance est exprimée par un terme constant et par un autre terme proportionnel au carré de la vitesse, et il arrive par là à des résultats déjà connus.

Le deuxième problème est résolu en employant la deuxième méthode d'approximation, et les résultats sont assez simples pour être appliqués; il remarque que cette méthode revient à regarder comme variables les coefficients de la deuxième et de la quatrième puissance de la vitesse dans l'expression de la résistance. Le premier varierait comme le cosinus de l'angle tangentiel, et le second comme le cube de ce cosinus.

Il montre ensuite que l'équation donnée par La Fay, dans son *Aide-Mémoire de l'artillerie de Marine*, répond à l'hypothèse de la résistance de l'air proportionnelle au bicarré de la vitesse et au cube de l'angle tangentiel, ce qui suffirait pour soulever quelque doute sur la conformité de cette équation avec ce qui a réellement lieu dans la pratique.

A cette occasion, l'auteur fait sentir la nécessité de ne pas trop se hâter à conclure d'un certain nombre d'expériences la justesse de telle ou telle hypothèse: il rappelle l'exemple de Bélidor, qui a soutenu le peu d'influence de l'air sur le tir des projectiles et a regardé comme suffisante la théorie du tir dans le vide.

Pour que les conclusions tirées des expériences soient

incontestables, il faut que les éléments principaux, tels que la portée, la vitesse initiale et l'angle de projection, soient donnés directement par l'expérience.

Cet article se termine par une expression très-remarquable de la valeur de la portée, quand l'angle de projection est très-petit.

Pour la solution du troisième problème, il dit qu'elle pourrait s'obtenir par la première méthode d'approximation précédemment donnée, mais il fait remarquer que, dans le cas d'un tir courbe, on peut adopter l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse, et il cite alors des solutions déjà connues, telles que celle de M. Otto et de Français, en reproduisant quelques-uns des principaux résultats obtenus par Legendre. Cette solution est précédée d'une méthode nouvelle pour déterminer la loi de la résistance de l'air au moyen d'expériences électriques.

NOTE. — Une Note à la suite du chapitre VI donne une application à un exemple numérique dans le cas du tir d'une bombe de $0^m,22$, lancée sous un angle de 45° et avec une vitesse initiale de 120 mètres.

En adoptant, comme M. Didion, une expression binome de la résistance de l'air, contenant le carré et le cube de la vitesse, et en employant la première méthode d'approximation précédemment indiquée, l'auteur arrive, par une voie simple, à calculer les éléments du mouvement et à déterminer les limites des erreurs dont ils sont affectés; ainsi, par exemple, il trouve que la portée horizontale étant de $928^m,7$, l'erreur est moindre que $1^m,6$,

et que la hauteur du tir étant $280^m,0$, l'erreur est moindre que $0^m,2$. La méthode de M. Didion, appliquée au même exemple, donne des valeurs qui s'écartent de plusieurs mètres des résultats précédents, ce qui en démontre l'infériorité.

Mais il y a plus, cette méthode donne des résultats encore moins approchés que celles de M. Otto et de Legendre qui reposent sur l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. Les calculs qui s'y rapportent, et qui sont indiqués dans cette note, mettent cette conclusion hors de doute.

—

RÉSUMÉ.

Nous pensons que cette analyse rapide suffira pour faire apprécier le Mémoire intéressant de M. le comte de Saint-Robert et engager les officiers qui s'appliquent à ce genre de questions à consulter ce beau travail.

Les considérations générales sur la résistance des milieux, la formation des équations du mouvement et la théorie du mouvement rectiligne, quoique questions très-connues, ont pris sous la plume de l'auteur un caractère tout à fait nouveau et l'ont conduit, comme l'on a vu, à des conséquences nouvelles.

La discussion de la trajectoire est une question presque neuve, et les résultats qu'il a obtenus semblent bien le prouver.

Mais, ce qui mérite particulièrement d'être remarqué, c'est la méthode analytique qui l'a guidé dans cette difficile recherche.

L'examen des cas particuliers où les équations peuvent s'intégrer ou se réduire aux quadratures est plein d'intérêt, quoiqu'il s'agisse aussi de questions déjà traitées par d'autres géomètres, et il ne manque pas de présenter quelques résultats nouveaux.

Quant aux méthodes d'approximation, on doit regarder la première comme tout à fait nouvelle dans son application à la balistique, et la deuxième comme due exclusivement à l'auteur ; la troisième méthode est la généralisation de résultats déjà connus.

L'application des principes exposés au tir des projectiles, les exemples numériques et la comparaison des résultats dévoilent toujours la finesse des raisonnements et la rare sagacité de l'auteur.

Nous croyons, enfin, que ce Mémoire mérite d'être connu, pour imprimer aux cours de balistique une direction plus sûre et plus lumineuse que celle qu'ils ont suivie jusqu'ici.

Nous ne saurions, cependant, terminer cet article sans attirer particulièrement l'attention des officiers d'artillerie sur la méthode citée plus haut, et proposée par l'auteur, pour déterminer expérimentalement la loi de la résistance de l'air.

Cette méthode se réduirait à disposer sur la ligne de tir un assez grand nombre de cibles réticulaires, assez rapprochées les unes des autres et reliées entre elles par des appareils électriques. Au moyen de ces appareils, il serait

possible de déterminer la vitesse dont le mobile serait animé en frappant chaque cible; des mesures directes feraient d'ailleurs connaître l'inclinaison de la trajectoire aux points qui correspondent aux vitesses observées.

Dès lors on pourrait, pour chaque point de la trajectoire, calculer le décroissement de la vitesse horizontale du projectile, et en divisant ce décroissement par la vitesse elle-même, multipliée par le décroissement de l'inclinaison de la courbe, on obtiendrait immédiatement la valeur de la résistance de l'air.

On voit aussi que la trajectoire elle-même pourrait être directement relevée dans ce genre d'expérience, et que les formules citées par l'auteur au chapitre I^er^ recevraient, dans ce cas, une application immédiate; ce qui conduirait également à connaître, pour chaque point de la trajectoire, la vitesse du mobile et la résistance de l'air.

La combinaison des deux méthodes pourrait, en outre, donner lieu à quelque simplification et fournir des vérifications utiles. En tout cas, on se trouverait amené à la construction des tables que l'auteur a proposées et qui, pour chaque vitesse observée, donneraient la valeur correspondante de la résistance de l'air.

De là, on pourrait ensuite découvrir la véritable loi suivant laquelle la résistance de ce milieu dépend de la vitesse des projectiles.

Gênes, 4 juin 1855.

DU MOUVEMENT

DES PROJECTILES SPHÉRIQUES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS (*).

PRÉFACE.

Dans l'état actuel de la balistique, on sait réduire aux quadratures les équations différentielles du mouvement des projectiles dans les milieux qui résistent en raison du carré de la vitesse; on connaît les propriétés de la trajectoire décrite dans ces milieux; et l'on peut calculer, avec tel

---

(*) Ce Mémoire a paru, pour la première fois, en langue italienne dans le t. XVI, II^e^ série, des *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, 1855. Il en a paru une traduction en français, en 1859, dans les t. X et XI du *Journal des armes spéciales et de l'État-major*. Cette traduction, faite sans la participation de l'auteur, fourmille de fautes au point d'en rendre quelquefois le sens inintelligible. C'est cette traduction revue et corrigée sur le texte italien que nous donnons ici.

On a ajouté l'adjectif *sphérique* pour distinguer ce Mémoire de ceux qui viennent après, touchant les projectiles oblongs, qui ont paru postérieurement (Note de 1872).

degré d'approximation que l'on veut, toutes les quantités nécessaires à la connaissance du mouvement.

Depuis que des expériences multipliées ont prouvé que, pour les vitesses très-grandes des projectiles de l'artillerie, la résistance de l'air croît plus rapidement que ne le suppose la loi newtonienne, il est devenu nécessaire d'étudier la question balistique avec d'autres lois de résistance plus conformes à la réalité.

Euler, dans ses commentaires sur les *Nouveaux principes d'Artillerie* de Benjamin Robins, a bien essayé de déterminer la trajectoire des projectiles, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré et à la quatrième puissance de la vitesse ; mais les séries auxquelles il est parvenu, n'étant généralement pas convergentes, ne peuvent servir à résoudre la question. Et nous voyons que ce grand géomètre, revenant sur le même sujet dans les mémoires de l'*Académie de Berlin* (année 1753), renonça à cette formule de résistance pour s'en tenir à la loi ordinaire du carré de la vitesse.

Charles Hutton qui fit, vers la fin du siècle dernier, beaucoup d'expériences sur la résistance de l'air, et qui démontra qu'il faut, pour l'exprimer, une puissance supérieure à la seconde, ne donne point l'équation de la trajectoire, et la calcule, comme Lombard, par une méthode d'approximation qui n'est applicable qu'au tir peu élevé. En effet cette méthode consiste à imaginer que le boulet se meut en

ligne droite, et à déterminer la quantité de son abaissement à chaque point, en la déduisant du temps employé pour y arriver.

Dans ces derniers temps, M. Didion, à qui nous sommes redevables de recherches très-importantes entreprises avec MM. Piobert et Morin, sur la résistance des milieux, a donné dans son *Traité de balistique* (Paris, 1848) des formules pour calculer le mouvement des projectiles dans un milieu qui résiste en raison du carré et du cube de la vitesse. Mais je ne crois pas ces formules applicables au tir sous de grands angles, la méthode dont il se sert consistant à substituer à la valeur variable du cosinus de l'angle formé par la tangente à la trajectoire avec l'horizon, une valeur moyenne constante. Or, quand l'angle de projection est assez grand, le cosinus varie trop, dans l'étendue de la courbe, pour qu'il soit permis de le considérer comme constant. Si, par exemple, l'angle de projection est de 45°, le cosinus varie dans le rapport de 1 à $\sqrt{2}$, dans la branche ascendante, et plus encore dans la branche descendante. Cette méthode est depuis longtemps employée pour le tir sous de petits angles, dans l'hypothèse usuelle de la résistance; mais il n'est jamais venu à la pensée de personne de la proposer pour le calcul du tir élevé.

On voit donc que la question balistique est loin d'être

épuisée et qu'il n'est pas hors de propos de la reprendre pour l'étendre à des lois plus compliquées que la loi newtonienne.

Il importerait d'abord de savoir, si les propriétés connues de la trajectoire, dans l'hypothèse du carré de la vitesse, sont encore les mêmes avec d'autres lois de la résistance, ou quelles modifications elles viennent alors à subir. Il serait ensuite à désirer qu'en l'absence d'une solution sous forme finie, on pût au moins évaluer numériquement, avec une approximation illimitée, les diverses circonstances du mouvement dans un milieu dont on connaîtrait la loi de résistance.

Dans le présent mémoire j'ai cherché à résoudre ces deux questions. J'ai cru qu'il ne serait pas inutile d'y ajouter le développement de quelques autres points de balistique, afin d'en former un tout dont on pût tirer profit dans la pratique.

Cet écrit est divisé en six chapitres:

Le premier renferme l'exposition des équations générales du mouvement d'un projectile dans un milieu résistant, indépendamment de toute hypothèse sur la résistance.

Dans le second, on s'occupe du mouvement rectiligne qui a lieu toutes les fois que la perte de poids du projectile due au milieu est égale à son propre poids, ou que la vitesse initiale est verticale.

Le troisième contient la discussion de la trajectoire, sans s'astreindre à aucune loi déterminée de résistance, et

dans la seule hypothèse que la résistance est une fonction de la vitesse, croissant d'une manière continue quand la vitesse croît, et devenant infinie en même temps qu'elle.

Dans le quatrième, on trouve l'analyse de quelques cas qu'on peut ramener aux quadratures, ou intégrer sous forme finie.

Le cinquième renferme diverses méthodes d'approximation servant à obtenir des valeurs indéfiniment approchées des éléments du mouvement, et à tracer la trajectoire, quelle que soit la loi de la résistance, quand même elle ne pourrait être exprimée mathématiquement.

Le sixième comprend l'application à la pratique de l'artillerie des formules obtenues.

Dans une Note finale, on trouve le calcul d'un cas particulier et la comparaison des différentes méthodes d'approximation.

DU MOUVEMENT

DES PROJECTILES SPHÉRIQUES

DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS.

CHAPITRE I

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN PROJECTILE SPHÉRIQUE DANS UN MILIEU RÉSISTANT.

1. Un projectile qui se meut dans un milieu résistant est sollicité par deux espèces de forces: par la *pesanteur*, qui agit sur toutes ses particules, et par la *résistance*, qui s'exerce sur tous les points de sa surface.

En vertu d'un théorème connu, que *le centre de gravité d'un corps se meut de la même manière que si toute la masse y était concentrée, et que toutes les forces extérieures y fussent transportées parallèlement à elles-mêmes*, le mouvement de translation du projectile est le même que celui d'un point matériel de masse égale,

auquel serait appliquée la résultante de la *pesanteur* et de la *résistance*.

La pesanteur varie suivant la distance du projectile au centre de la terre et la direction en est verticale; mais, dans les mouvements des projectiles, on peut, sans erreur sensible, supposer qu'elle est constante et qu'elle exerce son action suivant des droites parallèles entre elles, vu le peu d'étendue de la courbe décrite par rapport au rayon du globe terrestre.

La résistance dépend en général de la nature et de la densité du milieu, de la forme du projectile, des vitesses des divers éléments de sa surface, et des condensations ou dilatations du milieu en contact avec ces éléments. Elle peut avoir une direction différente de celle de l'élément de la courbe décrite par le centre de gravité du projectile: ce qui arrive toutes les fois que le mouvement de translation est accompagné d'un mouvement de rotation. Mais je suppose ici que la résistance est constamment tangente à la courbe décrite par le centre de gravité.

Cette hypothèse se vérifie quand le projectile est une sphère homogène, ou composée de couches concentriques homogènes, et qu'on ne lui a communiqué aucune rotation initiale.

Dans cet écrit, je considère donc le projectile comme un point matériel où se trouve concentrée toute la masse, et auquel sont appliqués et le poids du projectile verticalement et la résistance dirigée continuellement dans un sens opposé à la vitesse (*).

Si le milieu résistant, dans lequel se meut le projectile,

(*) Des deux espèces de forces qui animent un projectile, dans un milieu résistant, les unes, provenant de la *pesanteur*, se réduisent toujours à une force unique appliquée au centre de gravité, et égale au *poids* du projectile; les autres, provenant

est un fluide, il faut avoir égard à la perte de poids qu'il éprouve dans ce fluide ; laquelle, suivant le principe d'Archimède, est égale au poids du fluide déplacé.

Une circonstance, dont il convient en outre de tenir compte, est celle de la *proue* et de la *poupe fluides* qui accompagnent les corps en mouvement dans les fluides. Le volume du fluide, qu'entraîne avec lui un projectile, paraît être indépendant de la nature et de la densité du fluide et du corps, ainsi que de leurs vitesses relatives et ne dépendre que de la forme du corps. Dubuat (*), qui fut le premier à signaler ce phénomène, trouva qu'une sphère qui oscille, soit dans l'air, soit dans l'eau, entraîne avec elle un volume de fluide égal aux six dixièmes environ de son volume. A quelque légère différence près, due à la nature et aux dimensions des appareils, ce résultat s'accorde avec ceux qu'ont obtenus depuis Bessel, Sabine et Baily, dans des expériences sur les oscillations du pendule.

---

de la *résistance* du milieu, peuvent toujours se réduire à une seule force qui passe par le centre de gravité, et à un seul couple, dont le plan sera, en général, incliné à la direction de la force, ou, en d'autres termes, dont l'axe ne coïncidera pas, en général, avec la direction de la force. Les deux forces appliquées au centre de gravité se réduiront à une seule force dont l'effet sera de modifier le mouvement de translation du projectile, tandis que le couple en modifiera le mouvement de rotation.

Lorsque le couple est nul, c'est-à-dire lorsque les forces provenant de la résistance du milieu sont de nature à se réduire à une force unique passant toujours par le centre de gravité, le mouvement de rotation initial du projectile ne sera aucunement influencé par la résistance du milieu, et aura lieu comme si le projectile était libre de toute action étrangère ; de sorte que, dans ce cas, les deux mouvements de translation et de rotation du projectile seront indépendants l'un de l'autre. Mais si le couple n'est pas nul, la résistance du milieu influera, à la fois, sur le mouvement de rotation et sur le mouvement de translation du projectile, et alors ces deux mouvements dépendront l'un de l'autre et ne pourront pas être déterminés séparément.

Dans ce premier mémoire, on ne considère que le cas dans lequel la résistance du milieu est constamment dirigée en sens contraire de la vitesse. C'est le cas des projectiles sphériques de l'artillerie, lancés sans mouvement de rotation.

Dans les mémoires suivants, on s'occupe d'autres cas dans lesquels, le projectile ayant une rotation initiale, le couple est nul ou ne l'est pas. (*Addition de 1872*).

(*) *Principes d'hydraulique et de pyrodynamique.* 3me partie. Paris, 1816.

Poisson (*) et Plana (**) sont arrivés à des résultats peu différents au moyen de l'analyse.

2. Lorsqu'on veut déterminer le mouvement d'un corps pesant dans un milieu résistant, il convient d'examiner d'abord si la trajectoire est à simple ou à double courbure. Qu'on fasse passer un plan vertical par un élément quelconque de la courbe; que l'on considère les forces (le poids et la résistance) qui modifient le mouvement et en vertu desquelles l'élément suivant est décrit, on voit qu'elles agissent toutes les deux dans le plan dont il est question: il en résulte que le second élément y sera également compris. Appliquant le même raisonnement à tous les éléments consécutifs de la trajectoire, on arrive à conclure que celle-ci est comprise tout entière dans le même plan vertical.

Cela posé, soit P le poids du projectile dans le vide; Π la perte de poids qu'il éprouve dans le milieu, perte égale au poids du volume du fluide qu'il déplace.

Les forces qui sollicitent le projectile en mouvement sont: le poids relatif $P-\Pi$ et la résistance du milieu R. Si l'on décompose la force verticale $P-\Pi$ suivant deux directions, l'une tangente, l'autre normale à la courbe, en désignant par θ l'angle formé par la tangente avec l'horizon, on obtient:

$(P-\Pi)\sin\theta$, pour la composante tangentielle;

$(P-\Pi)\cos\theta$, pour la composante normale.

(*) *Mémoire sur les mouvements simultanés d'un pendule et de l'air environnant.* Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, Tome XI, 1832.

(**) *Mémoire sur le mouvement d'un pendule dans un milieu résistant.* Mém. de l'Acad. des Sciences de Turin, Tom. XXXVIII, 1834.

La résistance R agissant toujours suivant la tangente, le projectile est donc sollicité dans cette direction par la force

$$T = -R - (P - \Pi) \sin\theta,$$

et dans le sens de la normale, par la force

$$N = (P - \Pi) \cos\theta.$$

Or, nous savons, par les principes de la mécanique, qu'en réduisant toutes les forces qui sollicitent un mobile à deux forces T et N suivant la tangente et la normale, on a les équations

$$m \frac{du}{dt} = T,$$

$$m \frac{u^2}{\rho} = N,$$

dans lesquelles m est la masse du corps en question, u la vitesse au bout du temps t, ρ le rayon de courbure.

Dans le cas actuel, m se compose de la masse du projectile et de celle du fluide entraîné. En désignant par $\lambda\Pi$ le poids de la masse fluide entraînée par le projectile; par G la pesanteur dans le vide (à 45° de latitude et au niveau de la mer $G = 9^{m},80604$), on aura

$$m = \frac{P + \lambda\Pi}{G}.$$

En substituant à M, T, N leurs valeurs, on trouve

$$\frac{du}{dt} = -G\frac{R}{P+\lambda\Pi} - G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}\sin\theta,$$

$$\frac{u^2}{\rho} = G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi}\cos\theta.$$

Ces deux équations renferment la détermination complète du mouvement.

Si l'on pose

$$r = G\frac{R}{P+\lambda\Pi}, \qquad g = G\frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi},$$

on aura

[1] . . . . $\dfrac{du}{dt} = -r - g\sin\theta,$

[2] . . . . $\dfrac{u^2}{\rho} = g\cos\theta.$

Les quantités r et g sont linéaires et comparables entre elles, en notant que la première varie d'un instant à l'autre, et que la seconde est constante, si le milieu est homogène et si l'on néglige la variation de la pesanteur.

Quand la densité du milieu est très-petite relativement à celle du projectile, comme il arrive dans la plupart des questions de balistique, on peut négliger Π en présence de P, et prendre alors

$$r = G\frac{R}{P} \quad \text{et} \quad g = G.$$

Les projectiles de l'artillerie sont environ 6,000 fois plus denses que l'air, s'ils sont pleins; et 4,000 fois, s'ils sont creux. On peut donc fort bien, dans la recherche des lois de leur mouvement, négliger le poids de l'air, tant déplacé qu'entraîné. Mais il ne serait plus permis d'en agir ainsi dans d'autres cas, comme par exemple, quand le milieu résistant est l'eau, ou quand il s'agit de corps d'une faible densité, tels que les ballons aérostatiques, etc.

Revenant à la trajectoire, on voit que

Si $P > \Pi$, c'est-à-dire, si $g > 0$, chaque point de la trajectoire est situé au dessous de la tangente à la courbe au point qui le précède; en effet, des deux forces qui sollicitent le mobile, l'une (la résistance) a pour effet de le retarder suivant la direction tangentielle; l'autre (la pesanteur) tend continuellement à l'abaisser au dessous de la tangente; de sorte que la trajectoire sera une ligne courbe concave vers l'horizon.

Si $P = \Pi$, c'est-à-dire, si $g = 0$, le mobile n'étant sollicité que par une seule force (la résistance) qui agit constamment dans la direction du mouvement, tous les points du chemin qu'il parcourt seront sur la même direction; de sorte que la trajectoire sera rectiligne.

Si $P < \Pi$, c'est-à-dire, si $g < 0$, la courbe tournera sa convexité vers l'horizon.

La solution du dernier cas rentre dans celle du premier, puisqu'il suffit de renverser la trajectoire pour les rendre identiques.

Lorsque la courbe tourne sa concavité vers l'horizon, si ds est l'arc élémentaire de la courbe, le rayon osculateur a pour expression

$$\rho = \frac{ds}{-d\theta}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation [2], il vient

$$-u^2 \frac{d\theta}{ds} = g \cos\theta ;$$

d'où l'on tire

[3] . . . . $$ds = -\frac{u^2}{g} \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Si l'on rapporte la position du projectile à deux axes rectangulaires; l'axe des x horizontal et celui des y vertical et en sens opposé de la pesanteur, il vient

[4] . . . . $$dx = ds \cos\theta = -\frac{u^2}{g} d\theta ,$$

[5] . . . . $$dy = ds \sin\theta = -\frac{u^2}{g} \operatorname{tang}\theta \, d\theta .$$

Il est en outre évident que

[6] . . . . $$dt = \frac{ds}{u} = -\frac{u}{g} \frac{d\theta}{\cos\theta},$$

[7] . . . . $$\rho = \frac{u^2}{g} \frac{1}{\cos\theta}.$$

Si l'on avait la vitesse u en fonction de l'angle θ, les équations [3], [4], [5], [6], [7] fourniraient, après l'intégration, les valeurs de s, x, y, t, ρ en fonction de θ; et l'élimination de θ entre les équations [4], [5] donnerait l'équation de la trajectoire.

Pour avoir la valeur de u en fonction de θ, qu'on mette la valeur de dt [6] dans l'équation [1], on trouve

$$[8] \quad \ldots \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{u}{\cos\theta}\left(\frac{r}{g} + \sin\theta\right),$$

d'où l'on tire

$$[9] \quad \ldots \quad \frac{r}{g} = \frac{d(u\cos\theta)}{u\,d\theta}.$$

Il importe de remarquer qu'on a

$$\frac{r}{g} = \frac{R}{P - \Pi};$$

de sorte que l'équation [9] détermine le rapport qui existe entre la résistance et le poids relatif du projectile.

Quand on donnera r en fonction de u, l'équation [8] ou [9] déterminera u en fonction de θ.

Au moyen des équations précédentes, lorsqu'on connaît l'une de ces trois choses: la loi de la résistance, la trajectoire et la loi de la vitesse, on pourra déterminer les deux autres.

La question directe, c'est-à-dire celle où, connaissant la loi des forces qui sollicitent le mobile, il s'agit de déterminer toutes les circonstances du mouvement, est la plus importante: la solution exige d'abord l'intégration de l'équation différentielle [8] du premier ordre entre les deux variables u et θ, et ensuite l'intégration des formules différentielles [3], [4], [5], [6] du premier ordre à une seule variable (l'angle θ). Ces intégrations donneront lieu à des

difficultés analytiques plus ou moins grandes, que l'imperfection du calcul intégral pourra rendre souvent insurmontables.

La question inverse, c'est-à-dire celle qui a pour objet : étant données les circonstances caractéristiques du mouvement, de découvrir la loi des forces qui l'ont produit, est beaucoup plus simple sous le rapport analytique ; puisque la solution se réduit uniquement à des différentiations.

Si, par exemple, la courbe est donnée au moyen de l'ordonnée y en fonction de x, on peut avoir immédiatement la vitesse, le temps et la résistance en fonction de l'abscisse, à l'aide des formules suivantes :

$$[10]. \quad u = \frac{\sqrt{g}\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}};$$

$$[11]. \quad t' = \sqrt{-\frac{y''}{g}};$$

$$[12]. \quad \frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2};$$

dans lesquelles y', y'', y''', t' sont les dérivées de y, t par rapport à x.

Ces formules se déduisent des équations développées plus haut de la manière suivante :

On a

$$\text{tang}\,\theta = y'.$$

En différentiant par rapport à θ, il vient

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = y'' \frac{dx}{d\theta}.$$

En substituant à $\frac{dx}{d\theta}$ sa valeur, tirée de l'équation [4], on obtient

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = -\frac{u^2}{g} y'';$$

d'où l'on tire, pour la vitesse horizontale, l'expression

$$u \cos\theta = \sqrt{-\frac{g}{y''}}.$$

Et puisque

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

on obtient

$$u = \frac{\sqrt{g}\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}.$$

Pour avoir le temps, il suffit d'observer que puisque

$$u \cos\theta = \frac{dx}{dt},$$

il vient

$$t' = \sqrt{-\frac{y''}{g}}.$$

En vertu de l'équation [9], on trouve l'expression de la résistance, en différentiant la valeur déjà obtenue de $u\cos\theta$ par rapport à θ. On a, par conséquent,

$$\frac{d(u\cos\theta)}{d\theta} = \frac{g}{2}\,\frac{\frac{y'''}{y''^2}}{\sqrt{-\frac{g}{y''}}}\,\frac{dx}{d\theta} = -\frac{u^2}{2}\,\frac{\frac{y'''}{y''^2}}{\sqrt{-\frac{g}{y''}}} = u\,\frac{r}{g},$$

d'où l'on tire

$$\frac{r}{g} = -\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}.$$

Le problème de la détermination de la résistance que le milieu doit opposer pour que le projectile décrive une courbe donnée, fut traité pour la première fois par Newton et repris ensuite par Lagrange dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, 3e *partie*, *chap. IV*, où il a fait voir la véritable source de la méprise dans laquelle Newton est tombé dans la première édition des *Principes*. L'erreur de Newton consiste en ce que l'expression, qu'il a trouvée de la résistance, a au dénominateur $3y''^2$ au lieu de $2y''^2$.

CHAPITRE II.

DU MOUVEMENT RECTILIGNE DES PROJECTILES DANS LES MILIEUX RÉSISTANTS.

3. Avant de s'occuper du mouvement curviligne, il convient de considérer le cas particulier et plus simple du mouvement rectiligne.

Le chemin parcouru par un projectile dans un milieu résistant est rectiligne dans deux cas distincts :

1° Quand la perte de poids, éprouvée par le projectile plongé dans le milieu, est égale à son poids, comme il a été déjà indiqué plus haut (N° 2).

On en trouve un exemple dans le mouvement horizontal d'un corps flottant sur un liquide en repos.

2° Quand la direction du projectile, en un point quelconque de son trajet, est verticale, qu'elle soit dirigée de bas en haut ou de haut en bas. En effet, les deux forces qui sollicitent alors le mobile, à savoir, la pesanteur et

la résistance, ayant continuellement la même direction verticale, le mobile ne pourra sortir de cette direction.

Commençons par le premier cas. L'équation du mouvement est, en conservant les dénominations précédentes,

$$\frac{du}{dt} = -r.$$

Quand la valeur de la résistance r est donnée, ainsi que la vitesse initiale du projectile, on pourra toujours, au moyen de cette équation, déterminer complétement le mouvement.

Dans les cas naturels, la résistance dépend de la valeur de la vitesse u et peut être regardée comme une fonction connue de cette vitesse.

Je poserai donc

$$r = F(u).$$

On aura par conséquent

$$\frac{du}{dt} = -F(u);$$

d'où l'on tire

$$dt = -\frac{du}{F(u)};$$

et multipliant par u

$$u\,dt = ds = -\frac{u\,du}{F(u)}.$$

En intégrant, depuis l'instant où la vitesse est u_0, jusqu'à celui où elle acquiert la valeur u, on a les expressions

$$t = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{F(u)} = \int_{u}^{u_0} \frac{du}{F(u)},$$

$$s = -\int_{u_0}^{u} \frac{u\,du}{F(u)} = \int_{u}^{u_0} \frac{u\,du}{F(u)}$$

du temps nécessaire pour passer de la vitesse u_0 à la vitesse u, et de l'espace parcouru pendant ce temps.

Une particularité, qui caractérise la résistance, c'est qu'elle n'a d'effet que quand le mobile a une vitesse finie, et que son action cesse, quand la vitesse devient nulle. Si donc un mobile, sollicité seulement par la résistance, vient à perdre toute sa vitesse à un instant quelconque, il doit s'arrêter à cet instant et rester ensuite indéfiniment en repos.

La durée du mouvement et l'espace parcouru, jusqu'à l'extinction de la vitesse, sont donnés par les expressions suivantes :

$$T = \int_{0}^{u_0} \frac{du}{F(u)},$$

$$S = \int_{0}^{u_0} \frac{u\,du}{F(u)}.$$

Ces valeurs de T et de S peuvent être finies ou infinies, suivant la nature de la fonction qui représente la résistance.

Soit, par exemple,

$$F(u) = Au^n,$$

ce qui signifie que la résistance est proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse. On obtiendra, après l'intégration, pour le temps et l'espace,

$$(1-n)\,At = u_0^{1-n} - u^{1-n},$$

$$(2-n)\,As = u_0^{2-n} - u^{2-n}.$$

Pour avoir le temps, jusqu'au moment où la vitesse est anéantie, et l'espace correspondant, il suffit de faire $u = 0$; de sorte qu'on trouve

$$(1-n)\,AT = u_0^{1-n} - 0^{1-n},$$

$$(2-n)\,AS = u_0^{2-n} - 0^{2-n}.$$

Si $n < 1$, le temps et l'espace sont finis, c'est-à-dire que le projectile perd toute sa vitesse et s'arrête après un temps fini et après avoir parcouru un espace limité.

Si $n = 1$, l'équation qui donne le temps, devient

$$At = \log\left(\frac{u_0}{u}\right),$$

et nous montre que pour $u=0$, $T=\infty$. Au contraire, l'espace S est fini. Donc quand $n=1$, quoique la vitesse ne puisse s'annuler qu'après un temps infini, néanmoins l'espace parcouru par le projectile est limité et ne saurait excéder $\frac{u_0}{A}$.

Si $n>1$ et <2, on a encore une durée infinie et un espace fini.

Si $n=2$, on a $T=\infty$; l'équation qui donne l'espace se change en

$$As=\log\left(\frac{u_0}{u}\right);$$

et pour $u=0$, $S=\infty$. Ainsi le temps et l'espace, jusqu'à l'extinction de la vitesse, sont tous deux infinis.

Si $n>2$, le temps et l'espace sont encore tous deux infinis.

Il résulte de cette discussion que dans l'*hypothèse de la résistance proportionnelle à une puissance* n *de la vitesse, le temps et l'espace jusqu'à la cessation du mouvement sont tous deux finis pour* $n<1$; *le premier est infini et le second fini pour* $n\leqq 1$ *et* <2; *ils sont tous deux infinis pour* $n\geqq 2$.

Lorsque la vitesse initiale est infinie, le temps nécessaire pour la réduire à une vitesse finie, et l'espace parcouru pendant ce temps, sont donnés par les deux équations

$$(1-n)\,At=\infty^{1-n}-u^{1-n},$$

$$(2-n)\,As=\infty^{2-n}-u^{2-n}.$$

Il est évident que *si* $n\leqq 1$, *le temps et l'espace sont*

tous deux infinis; si $n > 1$ *et* $\leqq 2$, *le temps est fini et l'espace infini; si* $n > 2$, *le temps et l'espace sont tous deux finis.*

Ainsi, quand la résistance est d'un degré supérieur au premier, mais inférieur au second, on arrive à ce paradoxe d'un espace infini parcouru pendant un temps fini, paradoxe qui s'explique d'ailleurs facilement en songeant que la vitesse initiale est infinie.

Remarquons que le temps et l'espace nécessaires pour annuler une vitesse infinie sont en tout cas infinis tous deux.

Supposons maintenant qu'on ait, d'une manière plus générale,

$$F(u) = Au^{\alpha} + Bu^{\beta} + Cu^{\gamma} + \ldots\ldots + Mu^{\mu},$$

dans laquelle

$$\alpha < \beta < \gamma < \ldots\ldots < \mu.$$

Le temps et l'espace, jusqu'à la cessation du mouvement, sont

$$T = \int_0^{u_0} \frac{du}{Au^{\alpha} + Bu^{\beta} + Cu^{\gamma} + \ldots\ldots + Mu^{\mu}},$$

$$S = \int_0^{u_0} \frac{u\,du}{Au^{\alpha} + Bu^{\beta} + Cu^{\gamma} + \ldots\ldots + Mu^{\mu}},$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$T = \int_0^{u_0} \frac{1}{A + Bu^{\beta-\alpha} + \ldots\ldots + Mu^{\mu-\alpha}} \cdot \frac{du}{u^{\alpha}},$$

$$S = \int_0^{u_0} \frac{1}{A + Bu^{\beta-\alpha} + \ldots\ldots + Mu^{\mu-\alpha}} \cdot \frac{du}{u^{\alpha-1}},$$

où les exposants $\beta - \alpha, \ldots\ldots, \mu - \alpha$ sont nécessairement positifs.

Entre les limites de l'intégration, la fonction

$$\frac{1}{A + Bu^{\beta-\alpha} + \ldots\ldots + Mu^{\mu-\alpha}}$$

conserve une valeur finie. En désignant par K une moyenne entre les valeurs qu'acquiert cette fonction pour les valeurs de u comprises entre les limites $u = 0$, $u = u_0$, on a, en vertu d'un théorême de calcul intégral facile à démontrer,

$$T = K \int_0^{u_0} \frac{du}{u^{\alpha}},$$

de même que

$$S = K' \int_0^{u_0} \frac{du}{u^{\alpha-1}}$$

(K' est une moyenne différente de K).

La première intégrale est finie, si $\alpha < 1$, et infinie, si $\alpha \geqq 1$; la seconde est finie, si $\alpha < 2$, et infinie, si $\alpha \geqq 2$.

D'où il s'ensuit que les conclusions déjà trouvées, relatives au temps nécessaire pour éteindre la vitesse initiale, et à l'espace parcouru correspondant, restent les mêmes, quand

la résistance est exprimée par une fonction algébrique quelconque de la vitesse, et dépendent du plus petit exposant contenu dans la fonction.

Puisque l'expérience nous apprend que les corps qui se meuvent sur une surface plane solide, ou qui flottent sur un liquide, s'arrêtent après un temps fini, on pourrait en conclure que la fonction de la vitesse qui, en pareil cas, représente la résistance, doit contenir un terme de degré inférieur au premier.

Pour avoir le temps et l'espace nécessaires pour réduire une vitesse infinie à une vitesse finie, il suffira de mettre u^{μ} en facteur commun, et de raisonner comme ci-dessus. On arrivera aux mêmes conclusions que si la résistance était exprimée par le seul monôme qui renferme le plus fort exposant.

Si l'on a $\alpha < 1$ et $\mu > 1$, le temps nécessaire pour annuler une vitesse infinie sera fini, et si l'on a $\alpha < 2$ et $\mu > 2$, l'espace parcouru sera fini.

4. Passons maintenant au mouvement vertical qui peut être ascendant ou descendant. Dans le premier cas, la force qui agit sur le projectile est la somme du poids et de la résistance: dans le dernier, elle en est la différence. Donc ces deux mouvements sont distincts et ne peuvent être compris dans la même formule.

Dans le mouvement vertical ascendant, dont l'équation est

$$\frac{du}{dt} = -g - F(u),$$

le signe constamment négatif de $\frac{du}{dt}$ nous fait voir que la

vitesse u va toujours en diminuant de bas en haut jusqu'à devenir nulle.

A l'instant où $u=0$, la résistance, en vertu de sa nature, cesse d'agir, et le mobile qui n'est plus sollicité que par la pesanteur, tend à descendre et descendra effectivement, si la résistance, qui reprend son action dans le sens opposé, peut être vaincue par le poids relatif du mobile.

Arrivé donc à sa plus grande hauteur, le mobile retombera, si $F(u)$, qui exprime la résistance, acquiert pour $u=0$ une valeur inférieure à g; il s'arrêtera au contraire, si pour $u=0$, elle prend une valeur $\geqq g$.

Si l'on a en même temps $t=0$, $s=0$, $u=u_0$, le temps et l'espace sont donnés, dans le mouvement ascendant, par les expressions

$$t=\int_u^{u_0}\frac{du}{g+F(u)},$$

$$s=\int_u^{u_0}\frac{u\,du}{g+F(u)}.$$

La durée T et la hauteur S de l'ascension totale s'obtiennent en faisant $u=0$. On aura donc

$$T=\int_0^{u_0}\frac{du}{g+F(u)},$$

$$S=\int_0^{u_0}\frac{u\,du}{g+F(u)}.$$

Si l'on suppose la vitesse initiale infinie, le temps et l'espace nécessaires pour l'éteindre seront

$$T = \int_0^\infty \frac{du}{g + F(u)},$$

$$S = \int_0^\infty \frac{u\,du}{g + F(u)}.$$

Ces intégrales sont tantôt infinies, tantôt finies, suivant la nature de $F(u)$.

Supposons que $F(u)$ soit une fonction du degré n, c'est-à-dire soit telle que la fonction $\frac{F(u)}{u^n}$ converge vers une quantité finie quand u converge vers l'infini.

Désignons par u_1 une valeur finie et particulière de u, comprise entre 0 et ∞, les intégrales ci-dessus peuvent se décomposer de la manière suivante:

$$T = \int_0^{u_1} \frac{du}{g + F(u)} + \int_{u_1}^\infty \frac{du}{g + F(u)},$$

$$S = \int_0^{u_1} \frac{u\,du}{g + F(u)} + \int_{u_1}^\infty \frac{u\,du}{g + F(u)}.$$

Il est évident que les intégrales entre $u = 0$ et $u = u_1$ sont finies; quant à celles entre $u = u_1$ et $u = \infty$, elles peuvent se mettre sous la forme

$$\int_{u_1}^{\infty} \frac{1}{\frac{g}{u^n} + \frac{F(u)}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^n},$$

$$\int_{u_1}^{\infty} \frac{1}{\frac{g}{u^n} + \frac{F(u)}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^{n-1}}.$$

L'expression fractionnaire

$$\frac{1}{\frac{g}{u^n} + \frac{F(u)}{u^n}}$$

entre les limites $u = u_1$ et $u = \infty$ conserve toujours une valeur finie. Donc, une moyenne entre les différentes valeurs qu'elle prend entre ces limites est également finie. Maintenant si l'on met les deux intégrales sous la forme

$$K \int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^n},$$

$$K' \int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^{n-1}},$$

il ressort que *T est infini, si* $n \leqq 1$, *et fini, si* $n > 1$; *et que S est infini, si* $n \leqq 2$, *et fini, si* $n > 2$.

Il en résulte que, si la résistance de l'air suit une loi d'un degré supérieur au carré de la vitesse, il pourrait, suivant la grandeur du coefficient, y avoir, entre les bornes mêmes de l'atmosphère terrestre, une hauteur limite au delà de laquelle nos armes à feu ne pourraient plus lancer de projectiles, tout en admettant des moyens de projection très-puissants et même capables d'imprimer au projectile une vitesse initiale infinie (*).

(*) Pour avoir la valeur exacte de la hauteur qu'atteint un projectile dans l'atmosphère, il convient de remarquer que la densité de l'air ainsi que la pesanteur diminuent à mesure que le projectile s'élève. En tenant compte de ces deux circonstances on a, pour la pesanteur, le poids d'un volume d'air égal à celui du projectile et la résistance correspondants à la hauteur s,

$$G\left(\frac{r}{r+s}\right)^2, \qquad \Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}, \qquad Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}},$$

dans lesquels r représente le rayon de la terre; G la pesanteur à sa surface; k un coefficient égal à la pression de l'air sur l'unité de surface divisée par le poids de l'unité de volume d'air.

On a donc pour l'équation différentielle du mouvement ascendant du projectile

$$\frac{du}{dt} = -G\left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \frac{P-\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P+\lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}} - G\frac{Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P+\lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}.$$

Sans intégrer cette équation, on peut arriver aux mêmes conclusions que plus haut, touchant le temps et l'espace capables d'annuler une vitesse initiale infinie. A cet effet, que l'on divise la hauteur en deux parties: la première, depuis la vitesse infinie jusqu'à une vitesse finie; la seconde, depuis cette dernière jusqu'à la vitesse zéro. Si, dans la première partie, on fait abstraction de la pesanteur et l'on ne considère que la résistance de l'air; et si, dans la seconde partie, au contraire, on néglige la résistance de l'air, et l'on ne tient compte que de la pesanteur; il est évident que la somme des deux hauteurs, ainsi obtenues, sera plus grande que la véritable hauteur que devra atteindre le projectile. Si maintenant on trouve que cette somme est une quantité finie, on pourra en conclure qu'il en est de même pour la véritable hauteur. Pareil raisonnement s'appliquerait au temps.

La hauteur maximum à laquelle s'élève un projectile et le temps employé à l'atteindre, peuvent s'obtenir en termes finis dans le cas d'une résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse. En effet, en posant

$$F(u) = Au^n,$$

Soit s_1 l'espace parcouru pour passer de $u = \infty$ à $u = u_1$; on déterminera s_1 au moyen de l'équation

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\,\frac{Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}.$$

Comme il ne s'agit que d'avoir une limite supérieure de l'espace, il est clair qu'on peut substituer au second membre (en négligeant le signe) une quantité qui soit constamment moindre.

Or, on a

$$\frac{1}{P + \lambda\Pi} < \frac{1}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}.$$

On pourra donc calculer s_1 au moyen de l'équation

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\,\frac{Re^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi},$$

ou bien en posant, comme plus haut,

$$G\,\frac{R}{P + \lambda\Pi} = F(u),$$

au moyen de l'équation

$$\frac{u\,du}{ds} = -F(u)\,e^{-\frac{rs}{k(r+s)}};$$

on obtient les intégrales définies

$$T = \int_0^\infty \frac{du}{g + Au^n},$$

$$S = \int_0^\infty \frac{u\,du}{g + Au^n};$$

---

d'où l'on tire

$$s_1 = \int_{u_1}^\infty \frac{e^{\frac{rs}{k(r+s)}}\,u\,du}{F(u)}.$$

L'exponentielle, dans les limites de l'intégration, ayant toujours une valeur finie, on démontre en raisonnant, comme nous l'avons déjà fait antérieurement, que s_1 est fini, quand le degré de $F(u)$ est supérieur à deux.

Si l'on désigne par s_2 l'espace nécessaire pour passer de $u = u_1$ à $u = 0$, cet espace sera fourni par l'équation

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \frac{P - \Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}};$$

et puisqu'on a

$$\frac{P - \Pi}{P + \lambda\Pi} < \frac{P - \Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}}{P + \lambda\Pi e^{-\frac{rs}{k(r+s)}}},$$

on peut lui substituer l'équation suivante :

$$\frac{u\,du}{ds} = -G\,\frac{P - \Pi}{P + \lambda\Pi}\left(\frac{r}{r+s}\right)^2,$$

qui sont au nombre de celles qu'on connaît. Posons

$$\frac{A u^n}{g} = z,$$

d'où

$$du = \frac{1}{n} \left(\frac{g}{A}\right)^{\frac{1}{n}} z^{\frac{1}{n}-1} dz,$$

il vient

$$ng \left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{1}{n}} T = \int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{n}-1}}{1+z} dz,$$

---

ou bien en posant, comme plus haut,

$$G \frac{P-\Pi}{P+\lambda\Pi} = g,$$

$$\frac{u\,du}{ds} = -g \left(\frac{r}{r+s}\right)^2;$$

laquelle équation, étant intégrée de manière qu'à $u = u_1$ corresponde $s = s_1$ et à $u = 0$, $s = s_1 + s_2$, donne

$$s_2 = \frac{u_1^2 (r+s_1)^2}{2gr^2 - u_1^2 (r+s_1)}.$$

Cette valeur est finie pourvu qu'on ait

$$u_1^2 < \frac{2gr^2}{r+s_1} < 2gr.$$

Rien ne s'oppose à ce qu'on prenne u_1 inférieur à cette quantité, donc s_2 est également fini. En conséquence le maximum de hauteur à laquelle s'élève le projectile est nécessairement fini, toutes les fois que le degré de la fonction qui exprime la résistance est supérieur au deuxième.

Un raisonnement analogue prouverait que le temps est fini, quand $F(u)$ est d'un degré supérieur au premier.

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{2}{n}}S=\int_0^{\infty}\frac{z^{\frac{2}{n}-1}}{1+z}\,dz\,.$$

Or, on sait que

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

a étant une constante positive et <1. On aura donc

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{1}{n}}T=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}},\qquad \text{quand}\quad n>1,$$

$$ng\left(\frac{A}{g}\right)^{\frac{2}{n}}S=\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}},\qquad \text{quand}\quad n>2.$$

Lorsqu'on a

$$F(u)=Au^2+Bu^3,$$

le temps et l'espace pour arriver au point le plus élevé sont

$$T=\int_0^{\infty}\frac{du}{g+Au^2+Bu^3},$$

$$S=\int_0^{\infty}\frac{u\,du}{g+Au^2+Bu^3}.$$

En effectuant l'intégration entre les limites indiquées, on trouve

$$\frac{2}{C}(3g + AC^2)\,T$$

$$= \log\left(\frac{g}{BC^3}\right) + \frac{2(3g + 2AC^2)}{\sqrt{g(3g + 4AC^2)}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{BC^3}}\right),$$

$$\frac{2}{C^2}(3g + AC^2)\,S$$

$$= \log\left(\frac{BC^3}{g}\right) + \frac{6g}{\sqrt{g(3g + 4AC^2)}}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{BC^3}}\right),$$

où la valeur de C se déduit de l'équation du 3e degré

$$BC^3 - AC^2 - g = 0.$$

La fonction que nous considérons ici est celle qu'ont employée MM. Piobert et Didion pour représenter la résistance de l'air aux projectiles de l'artillerie (*).

(*) Avec un boulet du poids de 12 kilogr., on a

$$A = 0{,}000374, \qquad B = 0{,}00000086,$$

en supposant que le mètre cube d'air pèse 1k,208.

En substituant ces valeurs dans les formules ci-dessus, et prenant $g = 9^m{,}80517$ (gravité à Turin), on obtient

$$C = 483{,}63, \qquad T = 19'',24, \qquad S = 3966^m.$$

De sorte que, si l'atmosphère était partout également dense, un boulet de 12k ne pourrait, en aucun cas, s'élever à plus de 3966m, hauteur inférieure à celle du Mont-Blanc.

Il importe de remarquer que toutes les fonctions ne sont pas d'un degré qu'on puisse déterminer de la manière qui a été expliquée plus haut : il est des fonctions pour lesquelles la limite de $\frac{F u}{u^n}$, quand u converge vers l'infini, est toujours nulle ou infinie, quelle que soit la valeur de n qu'on veuille adopter.

En ayant égard au décroissement de la densité et de la pesanteur, la véritable hauteur sera un peu plus forte. Conformément à ce qui a été dit dans la note précédente, on peut trouver une limite supérieure de la véritable hauteur, en divisant le trajet en deux parties et négligeant l'action de la pesanteur dans la première, et celle de la résistance dans la seconde. Nous aurons, pour la première partie,

$$\frac{u\,du}{ds} = -F(u)\,e^{-\frac{rs}{k(r+s)}},$$

à laquelle on peut substituer

$$\frac{u\,du}{ds} = -F(u)\,e^{-\frac{s}{k}},$$

attendu qu'on a

$$e^{-\frac{s}{k}} < e^{-\frac{rs}{k(r+s)}};$$

donc

$$e^{-\frac{s}{k}}\,ds = -\frac{u\,du}{F(u)} = -\frac{du}{Au + Bu^2}.$$

En intégrant de manière que $s = 0$ donne $u = \infty$, on trouve

$$s_1 = -k \log\left[1 - \frac{1}{Ak}\log\left(1 + \frac{A}{Bu_1}\right)\right].$$

Nous aurons, pour la seconde partie,

$$s_2 = \frac{u_1^2 (r + s_1)^2}{2gr^2 - u_1^2 (r + s_1)}.$$

Telles sont les fonctions

$$A \log u, \qquad A e^{mu}, \qquad A u^m (\log u)^n, \text{ etc.}$$

La vitesse u_1 peut être choisie arbitrairement, mais il convient de la déterminer de manière que $s_1 + s_2$ soit un minimum.

En posant, comme plus haut,

$$A = 0{,}000374, \qquad B = 0{,}00000086,$$

et prenant

$$k = \frac{10198}{1{,}208} = 8442, \qquad r = 6366407^{\text{m}},$$

on trouve approximativement

$$u_1 = 175^{\text{m}}.$$

En substituant cette valeur dans les équations ci-dessus, on obtient

$$s_1 = 4248^{\text{m}}, \qquad s_2 = 1564^{\text{m}}, \qquad s_1 + s_2 = 5812^{\text{m}}.$$

Ainsi la limite de hauteur que ne peut atteindre un boulet de 12 k, même avec une vitesse infinie, est certainement inférieure à 5812m, hauteur plus faible que celle des montagnes les plus élevées du globe et que celles auxquelles se sont élevés beaucoup d'aéronautes.

De même que l'atmosphère oppose un obstacle infranchissable à la sortie d'un projectile qui serait lancé de la surface terrestre, de même l'atmosphère éteindrait presque complétement la vitesse, quelque grande qu'elle fût, d'un projectile qui y pénétrerait du dehors. En effet, ce projectile arriverait à terre avec un mouvement très-lent, si la pesanteur ne venait à son aide, dans la partie inférieure de son cours, comme l'a fait remarquer M. Schiaparelli, dans ses belles recherches sur les étoiles filantes.

L'atmosphère agit comme un coussin qui s'interpose entre la terre et le reste de l'univers. C'est ce qui explique comment une étoile filante qui entre dans l'atmosphère avec une vitesse comprise entre 16 kilomètres et 72 kilomètres par seconde ne vient heurter la terre, sous forme d'un aérolithe, qu'avec une vitesse égale, sinon inférieure, à celle d'un boulet de canon d'un poids égal. Voyez à ce propos les Mémoires suivants de M. Schiaparelli:

Note e riflessioni sulla teoria astronomica delle stelle cadenti. Memorie della Società italiana delle Scienze, Serie III, Tomo I. Firenze, 1867.

Sulla velocità delle meteore cosmiche nel loro movimento a traverso dell'atmosfera terrestre. Rendiconti del R. Istituto lombardo di Scienze e lettere, Serie II, Vol. I. Milano, 1868. *(Addition de 1872).*

De ces fonctions, les unes rendent finies les intégrales mentionnées plus haut, les autres les rendent infinies.

Si, par exemple, on prend

$$F(u) = A \log u,$$

on a

$$T = \int_0^\infty \frac{du}{g + A \log u}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\log u}{g + A \log u} \cdot \frac{du}{\log u} = K \int_0^\infty \frac{du}{\log u} = \infty,$$

$$S = \int_0^\infty \frac{u\,du}{g + A \log u}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\log u}{g + A \log u} \cdot \frac{u\,du}{\log u} = K' \int_0^\infty \frac{u\,du}{\log u} = \infty.$$

Si l'on pose

$$F(u) = A e^{mu},$$

il vient

$$T = \int_0^\infty \frac{du}{g + A e^{mu}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{mu}}{g + A e^{mu}} \cdot \frac{du}{e^{mu}} = K \int_0^\infty e^{-mu}\, du = \frac{K}{m},$$

$$S = \int_0^\infty \frac{u\,du}{g + Ae^{mu}}$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{mu}}{g + Ae^{mu}} \cdot \frac{u\,du}{e^{mu}} = K' \int_0^\infty u e^{-mu}\,du = \frac{K'}{m^2}.$$

Dans ce dernier cas, l'intégration du temps est possible, et l'on obtient aisément

$$mgT = \log\left(1 + \frac{g}{A}\right).$$

5. Il nous reste en dernier lieu à examiner le mouvement de descente vertical. L'équation fondamentale est dans ce cas

$$\frac{du}{dt} = g - F(u),$$

d'où l'on déduit le temps et l'espace en fonction de la vitesse, au moyen des deux intégrales

$$t = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{g - F(u)},$$

$$s = \int_{u_0}^{u} \frac{u\,du}{g - F(u)}.$$

Le mouvement de descente jouit d'une propriété remarquable: qu'il soit accéléré ou retardé, la vitesse converge toujours vers une limite qu'elle ne peut dépasser.

A partir de $u = u_0$, la vitesse commence à croître ou à décroître, suivant que

$$g - F(u_0)$$

est positif ou négatif; mais arrivé à une valeur U de u, qui satisfait à l'équation

$$g - F(u) = 0,$$

la vitesse ne peut plus changer de valeur. En effet, tous les coefficients différentiels de u, $\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3u}{dt^3}$, etc. se réduisent à zéro pour cette valeur particulière de u, si les différentes dérivées $F'(u)$, $F''(u)$, etc. de $F(u)$ ne deviennent pas infinies pour $u = U$. Donc U est une limite vers laquelle converge la vitesse u, pourvu que $F(u)$ soit une fonction continue dans le voisinage de $u = U$.

On peut facilement démontrer que le temps et l'espace nécessaires pour atteindre cette limite sont infinis. Soit n le nombre des racines égales à U, contenues dans l'équation précitée, on aura

$$g - F(u) = (U - u)^n \varphi(u),$$

$\varphi(u)$ étant une fonction qui ne peut devenir nulle pour $u = U$.

Le temps et l'espace deviennent

$$t = \int_{u_0}^{U} \frac{1}{\varphi(u)} \cdot \frac{du}{(U-u)^n},$$

$$s = \int_{u_0}^{U} \frac{u}{\varphi(u)} \cdot \frac{du}{(U-u)^n}.$$

Les fonctions $\frac{1}{\varphi(u)}$, $\frac{u}{\varphi(u)}$ restent finies dans toute l'étendue de l'intégration; si donc on met les deux intégrales sous la forme :

$$t = K\int_{u_0}^{U}\frac{du}{(U-u)^n} = \frac{K}{1-n}\left[(U-u_0)^{1-n} - (U-U)^{1-n}\right],$$

$$s = K'\int_{u_0}^{U}\frac{du}{(U-u)^n} = \frac{K'}{1-n}\left[(U-u_0)^{1-n} - (U-U)^{1-n}\right],$$

K et K' seront deux moyennes de valeur finie. On en conclut que t et s sont finis, si $n<1$, et infinis, si $n \geqq 1$.

Dans le cas particulier de $U=0$, K' étant une moyenne entre $\frac{u_0}{\varphi(u_0)}$ et zéro, on ne peut affirmer que K' soit fini ou infiniment petit. Afin de découvrir ce que devient alors s, observons que l'intégrale qui en est l'expression prend alors la forme

$$s = \int_{u_0}^{0}\frac{1}{\varphi(u)}\cdot\frac{du}{(-u)^{n-1}}$$

$$= K''\int_{u_0}^{0}\frac{du}{(-u)^{n-1}} = \frac{K''}{2-n}(u_0^{2-n} - 0^{2-n}).$$

En conséquence s est fini, si $n<2$; infini, si $n \geqq 2$.

Quand $n<1$, les dérivées successives $F'(u)$, $F''(u)$, etc... sont infinies pour $u=U$.

Il résulte de tout ce qui précède que *le mouvement vertical de descente tend à devenir uniforme; mais qu'il ne le devient rigoureusement qu'à l'infini, quand* F(u) *est une fonction continue de* u.

La vitesse U d'un pareil mouvement, qui rend

$$g = F(u) = r,$$

et par suite

$$R = P - \Pi,$$

ou, en d'autres termes qui rend la résistance du milieu égale au poids apparent du mobile, a été nommée par Huyghens *vitesse terminale* (*).

Le cas de la vitesse initiale égale à la vitesse finale, mérite une attention particulière. Il est évident qu'alors le mouvement se conserve constamment uniforme.

Si l'on suppose que la fonction $F(u)$ a la propriété de croître en même temps que u, depuis $u = 0$ jusqu'à $u = \infty$, on reconnaît aisément par le signe de $\frac{du}{dt}$ que, si $u_0 > U$, la vitesse va toujours en décroissant de haut en bas, sans pouvoir jamais atteindre la vitesse terminale U; qu'au contraire, si $u_0 < U$, la vitesse va constamment en croissant de haut en bas, sans jamais dépasser la vitesse

(*) « Un corps, en tombant à travers l'air, augmente continuellement sa vitesse, « mais toutefois en sorte qu'il n'en peut jamais exceder, ni mesme atteindre, un certain « degré; qui est la vitesse qu'il faudroit à l'air à soufler de bas en haut, pour tenir « le corps suspendu sans pouvoir descendre; car alors, la force de l'air contre ce corps, « égale sa pesanteur. J'appelle cette vitesse, dans chaque corps, la vitesse *Terminale* ». *Discours de la Cause de la Pesanteur.* Par C. H. D. Z. (Christian Huyghens de Zuylichem) A Leide, chez Pierre Vander Aa, Marchand Libraire. MDCXC.

terminale ; qu'enfin, si $u_0 = U$, la vitesse est constamment égale à la vitesse terminale.

Dans la discussion du mouvement vertical descendant, il ne faut pas perdre de vue une circonstance que nous avons déjà signalée, due à la nature même de la résistance, laquelle consiste en ce que, si $F(u)$, pour $u = 0$, a une valeur plus grande que g, le mobile ne peut passer par la vitesse zéro, sans s'y arrêter et rester alors indéfiniment en repos. Ainsi, un projectile, lancé de haut en bas, avec une vitesse quelconque, dans un milieu résistant pour lequel on a $F(0) > g$, finira toujours par s'arrêter après un temps et un espace finis.

CHAPITRE III.

DISCUSSION DE LA TRAJECTOIRE.

6. La nature de la courbe que décrit un projectile dépend évidemment de la loi de résistance du milieu où il se meut. La théorie de la résistance des milieux est encore enveloppée de beaucoup d'obscurité. On sait bien que la résistance est une fonction de la vitesse; mais la seule chose qu'on puisse admettre *a priori* sur la nature de cette fonction, c'est qu'elle va croissant avec les valeurs croissantes de la variable. C'est pourquoi, sans adopter aucune hypothèse spéciale sur la résistance du milieu, il serait utile de discuter la trajectoire lorsqu'on suppose seulement que la forme de la fonction, qui exprime la résistance en raison de la vitesse, est telle qu'elle croît progressivement avec la variable, et qu'elle converge vers l'infini en même temps que celle-ci. C'est la marche que je vais suivre.

Je suppose donc

$$\frac{r}{g} = \frac{R}{P - \Pi} = f(u),$$

et

$$f'(u) > 0, \qquad f(\infty) = \infty.$$

La fonction $f(u)$ peut être telle, que pour $u = 0$ on ait,

$$f(0) > 1, \quad \text{ou} \quad f(0) = 1, \quad \text{ou} \quad f(0) < 1;$$

c'est-à-dire que la résistance peut être telle que, pour une vitesse infiniment petite, sa valeur soit plus grande que le poids relatif du projectile, ou égal à celui-ci, ou plus faible que lui. Dans la discussion de la courbe, il ne faudra pas perdre de vue ces trois cas. Cela posé, examinons les variations de la vitesse aux différents points de la courbe.

1r Cas, $f(0) > 1$.

L'accroissement de la vitesse, qui est exprimé par (équation [1], n° 2)

$$\frac{du}{dt} = -g \left\{ f(u) + \sin\theta \right\},$$

conserve toujours le signe négatif, que θ soit positif ou négatif. En effet, pour une valeur négative, la plus petite valeur que peut recevoir *sin* θ est -1, et la plus petite valeur que peut acquérir $f(u)$ est $f(0)$, laquelle est, d'après l'hypothèse, plus grande que un; de sorte que la quantité entre parenthèses sera toujours positive, et par suite $\frac{du}{dt}$ sera toujours négatif.

Donc u et t varient en sens opposé, c'est-à-dire que si t croît, u décroît, et au contraire si t diminue, u augmente.

Si l'on prend donc pour origine un point quelconque, et si l'on s'avance du côté des temps positifs, c'est-à-dire dans le sens du mouvement, la vitesse va toujours en diminuant; mais quand on arrive à $u=0$, il est clair que le projectile doit s'arrêter et rester en repos, comme nous l'avons déjà fait observer dans l'étude du mouvement rectiligne. On en conclut que, du côté des temps positifs, la vitesse finit toujours par s'éteindre, et cela, quelle que soit la loi de variation de l'angle θ, qu'il devienne nul ou négatif.

Du côté des temps négatifs, la vitesse croît constamment en s'éloignant de l'origine, et son accroissement n'a point de limites; de sorte que la vitesse converge vers l'infini, quelles que soient les variations de θ.

$$2^{me}\ Cas,\ f(0)=1.$$

La valeur de $\frac{du}{dt}$ est également négative dans toute l'étendue de la courbe et ne devient nulle que pour $u=0$ et $\theta=-\frac{\pi}{2}$. Donc la vitesse va toujours en diminuant dans le sens du mouvement jusqu'à devenir égale à zéro.

Du côté des temps négatifs, elle converge vers l'infini.

$$3^{me}\ Cas,\ f(0)<1.$$

Toutes les fois que θ est positif, c'est-à-dire dans tous les points de la branche ascendante de la trajectoire, $\frac{du}{dt}$ est négatif; il en est encore de même pour θ négatif, depuis $\theta=0$ jusqu'à la valeur de θ qui satisfait à la relation

$$f(u)+\sin\theta=0.$$

A partir donc d'un point quelconque situé sur la branche ascendante, la vitesse décroît à mesure que le temps augmente, mais seulement jusqu'au point où u prend une valeur u_1 qui satisfait à l'équation

$$f(u_1) + \sin\theta_1 = 0.$$

Cette valeur de $u = u_1$ est un minimum ; en effet elle donne $\frac{du}{dt} = 0$, et étant introduite dans l'expression du second coefficient différentiel, qui est

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -gf'(u)\frac{du}{dt} - g\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

ou bien, en remplaçant $\frac{d\theta}{dt}$ par sa valeur tirée de l'équation [6], n° 2,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -gf'(u)\frac{du}{dt} + \frac{g^2\cos^2\theta}{u},$$

la réduit à

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{g^2\cos^2\theta_1}{u_1};$$

c'est-à-dire à une quantité positive, u_1 ne pouvant être ni nul, ni négatif.

Au moyen de l'équation [9] du n° 2, il est facile de démontrer que u_1 est différent de zéro. L'équation

$$\frac{d(u\cos\theta)}{ud\theta} = f(u)$$

étant mise sous la forme

$$\frac{d(u\cos\theta)}{u\cos\theta} = f(u)\frac{d\theta}{\cos\theta},$$

et étant intégrée de la manière suivante, à partir de $u = u_0$ et de $\theta = \theta_0$,

$$\log\frac{u\cos\theta}{u_0\cos\theta_0} = k\log\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)},$$

devient

$$u = u_0\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\left\{\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)}\right\}^k$$

$$= u_0\left(\frac{\cos\theta_0}{\cos\theta}\right)^{1-k}\left(\frac{1-\sin\theta_0}{1-\sin\theta}\right)^k,$$

où k représente une moyenne entre les valeurs que prend $f(u)$ dans l'étendue de l'intégration, et est en conséquence positif et moindre que l'unité, si l'on prend pour u_0 une valeur très-voisine de $u = 0$.

Maintenant, si u pouvait devenir nul, θ devrait atteindre une valeur réelle, capable d'annuler le second membre de l'équation précédente; mais k étant plus petit que 1, il est facile de voir qu'il n'existe point de valeur de θ qui remplisse cette condition.

La vitesse u ne peut non plus devenir négative, puisque, décroissant par degrés insensibles, elle devrait passer auparavant par zéro, ce qui a déjà été démontré impossible.

Donc la valeur de u_1, qui annule $\frac{du}{dt}$, est nécessairement supérieure à zéro.

Au delà de ce minimum, $\frac{du}{dt}$ changeant de signe, la vitesse croît successivement avec le temps, jusqu'à ce qu'elle atteigne une nouvelle valeur u_2, qui satisfait à l'équation

$$f(u_2) + \sin\theta_2 = 0.$$

Cette valeur de $u = u_2$ ne peut être un maximum proprement dit, car alors u devrait recommencer à décroître à partir de u_2, ce qui exigerait que $\frac{d^2u}{dt^2}$ devînt négatif ou nul; mais $\frac{d^2u}{dt^2}$ conserve, au contraire, constamment une valeur positive, et ne peut s'annuler qu'avec tous les autres coefficients différentiels.

Donc u_2 est une limite vers laquelle converge u à mesure que le temps croît.

Par conséquent, dans le cas de $f(0) < 1$, la vitesse acquiert une valeur minimum au point où

$$f(u_1) + \sin\theta_1 = 0;$$

et à partir de ce point, et en s'en éloignant de part et d'autre, la vitesse va en croissant continuellement; mais dans le sens du mouvement, la vitesse s'approche indéfiniment d'une limite qu'elle ne peut dépasser et qui est fournie par l'équation

$$f(u_2) + \sin\theta_2 = 0;$$

tandis que dans le sens opposé la vitesse croît indéfiniment.

Il résulte de toutes ces considérations, que *la vitesse d'un projectile, qui se meut dans un milieu résistant, tend vers l'infini du côté des temps négatifs et que, de l'autre côté, c'est-à-dire du côté où le mouvement a lieu, la vitesse tend vers zéro quand* $f(0) \geqq 1$, *et vers une limite fixe différente de zéro, quand* $f(0) < 1$.

7. On a déjà fait observer (2) que l'angle θ diminue quand t croît, parce que des deux forces qui sollicitent le mobile, l'une (la résistance) ne fait que le retarder suivant la tangente, et l'autre (la pesanteur) le fait descendre au-dessous de cette même tangente.

Nous démontrerons maintenant qu'il converge vers la valeur $-\frac{\pi}{2}$. A cet effet reprenons l'équation [6] du n° 2,

$$dt = -\frac{u}{g}\frac{d\theta}{\cos\theta},$$

et intégrons, à partir d'un point quelconque qu'on prend pour origine, où $\theta = \theta_0$, $t = 0$; il vient

$$gt = \int_{\theta}^{\theta_0} u\frac{d\theta}{\cos\theta} = K \log \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)},$$

où K représente une moyenne entre les différentes valeurs que prend la vitesse dans les limites de l'intégration.

La vitesse u ne pouvant devenir nulle quand $f(0) < 1$, ainsi qu'il a été prouvé plus haut (6), il résulte que, dans ce cas, K a une valeur finie supérieure à zéro.

Cela posé, de l'examen de cette équation, il ressort qu'à $t = \infty$ doit correspondre $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Donc

$$\theta_2 = -\frac{\pi}{2},$$

et la vitesse limite u_2 est donnée par l'équation

$$f(u_2) - 1 = 0.$$

Ainsi la vitesse u_2 est égale à celle que, dans le mouvement rectiligne descendant, on a désignée sous le nom de *vitesse terminale* (5).

Dans le cas de $f(0) \gtreqless 1$, la vitesse se réduisant toujours à zéro, le raisonnement précédent ne peut servir à déterminer l'angle de l'élément de la courbe au point où cesse le mouvement.

Pour trouver cet angle, prenons l'équation [8], n° 2, de laquelle on déduit

$$\frac{d\theta}{\cos\theta} = \frac{du}{u\{f(u) + \sin\theta\}}.$$

L'intégration donne

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right) + \int_{u_0}^{u} \frac{du}{u\{f(u) + \sin\theta\}}.$$

Pour avoir la valeur de θ, qui correspond à $u = 0$, il faut étendre l'intégrale jusqu'à $u = 0$. Or l'intégrale

$$\int_{u_0}^{0} \frac{du}{u\{f(u)+\sin\theta\}}$$

est toujours infinie; en effet, si on l'écrit sous la forme

$$K\int_{u_0}^{0}\frac{du}{u},$$

on voit que

$$\int_{u_0}^{0}\frac{du}{u}=-\infty,$$

tandis que K est assurément supérieur à zéro.

Donc

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=-\infty;$$

d'où l'on conclut

$$\theta=-\frac{\pi}{2}.$$

Donc, *l'extrémité de la courbe, du côté des temps positifs, est toujours verticale.*

Quant à l'autre extrémité de la courbe, où la vitesse devient infinie, voyons quelle est la limite de θ.

L'angle correspondant à $u=\infty$, est donné par l'équation

$$\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)+\int_{u_0}^{\infty}\frac{du}{u\{f(u)+\sin\theta\}}.$$

Si $f(u)$ est d'un degré qu'on puisse déterminer par les règles ordinaires, l'intégrale

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u\{f(u) + \sin\theta\}}$$

a une valeur finie, toutes les fois que le degré de $f(u)$ est plus grand que zéro, et une valeur infinie lorsque $f(u)$ est de degré zéro, ou, en d'autres termes, lorsque la résistance est constante. En effet, soit n le degré de $f(u)$, l'intégrale ci-dessus peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{\frac{f(u)}{u^n} + \frac{\sin\theta}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^{n+1}}.$$

Dans l'intervalle compris entre $u = u_0$ (on suppose que l'origine est en deçà du point où la vitesse est un minimum) et $u = \infty$, le premier facteur est toujours fini. Il suffit donc, pour reconnaître si l'intégrale est finie ou infinie, de considérer l'intégrale

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^{n+1}}.$$

Or, celle-ci est finie, si $n > 0$, et infinie, si $n = 0$.

On en conclut que $\theta < \frac{\pi}{2}$, *quand* $n > 0$, *et* θ_0 *différent de* $\pm\frac{\pi}{2}$; *et que* $\theta = \frac{\pi}{2}$, *quand* $n = 0$.

Si $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, le mouvement est vertical.

Lorsque $\theta < \frac{\pi}{2}$, il peut être positif, nul ou négatif, suivant la valeur de θ_0. Pour qu'il soit nul ou négatif, il faut que θ_0 soit négatif. Dans ce cas, la trajectoire n'a pas de branche ascendante, et consiste en une seule branche descendante.

8. Le temps employé par le projectile pour passer de la vitesse u_0 à la vitesse u est exprimé par

$$gt = -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{f(u) + \sin\theta}.$$

Si l'on veut connaître le temps nécessaire pour passer de la vitesse infinie, qu'aurait le projectile à l'extrémité de la branche qui précède l'origine, à la vitesse qu'il a à l'origine, il convient de pousser l'intégration jusqu'à $u = \infty$.

On a donc, pour en déterminer la valeur,

$$gt = -\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{f(u) + \sin\theta}.$$

Soit, comme auparavant, n le degré de $f(u)$, on peut mettre l'intégrale sous la forme

$$gt = -\int_{u_0}^{\infty} \frac{1}{\frac{f(u)}{u^n} + \frac{\sin\theta}{u^n}} \cdot \frac{du}{u^n}.$$

Entre les limites de l'intégration, le premier facteur est toujours fini ; on peut donc constater si t est fini ou infini, en n'examinant que l'intégrale définie

$$\int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{u^n}.$$

Celle-ci est infinie, si $n < 1$ ou $n = 1$, et finie, si $n > 1$; donc *le temps négatif, correspondant à* $u = \infty$, *est une quantité infinie, toutes les fois que* f(u) *est d'un degré inférieur ou égal au premier, et conserve, au contraire, une valeur finie, si* f(u) *est d'un degré supérieur au premier.*

Si nous passons maintenant à la recherche du temps nécessaire au projectile, pour arriver à l'autre extrémité de la courbe, il convient de distinguer trois cas :

1° Quand $f(0) > 1$, suivant ce qui a été démontré plus haut, la vitesse va toujours en diminuant jusqu'à zéro. Le temps employé pour éteindre la vitesse est fourni par l'intégrale

$$gt = -\int_{u_0}^{0} \frac{du}{f(u) + \sin\theta},$$

qui est évidemment une quantité finie, le dénominateur ne pouvant jamais s'annuler. Dans ce cas le mouvement a lieu depuis $t = 0$ jusqu'à une valeur de t fournie par l'intégrale précédente ; et depuis cette dernière valeur jusqu'à $t = \infty$, on aura $u = 0$, et le projectile restera immobile dans la même position.

2° Quand $f(0) = 1$, la vitesse va toujours en décroissant

jusqu'à zéro. Le temps nécessaire pour atteindre cette vitesse zéro, est donné par la relation

$$g\,t = -\int_{u_0}^{0} \frac{du}{f(u) + \sin\theta}.$$

Soit n un nombre capable de rendre finie la fraction

$$\frac{f(u) - 1}{u^n},$$

pour $u = 0$.

Si l'on donne à l'intégrale la forme

$$g\,t = -\int_{u_0}^{0} \frac{u^n}{f(u) + \sin\theta} \frac{du}{u^n},$$

on en conclut que t *est fini, si* $n < 1$, *et infini, si* $n \geqq 1$.

3° Quand $f(0) < 1$, la vitesse dans la branche descendante, décroît d'abord jusqu'à devenir un minimum, puis croît continuellement jusqu'à une certaine limite. Lorsqu'après l'intégration de l'équation [9], on aura u en fonction de θ, on pourra, au moyen de l'équation

$$f(u) + \sin\theta = 0,$$

déduire la valeur de θ_1, qui correspond à la vitesse minimum. Ensuite l'équation [6]

$$g\,t = -\int_{\theta_0}^{\theta_1} u \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

donnera le temps nécessaire pour que la vitesse devienne un minimum, temps qui est évidemment fini.

Le temps après lequel la vitesse acquiert une valeur constante est donné par l'intégrale

$$g\,t = -\int_{\theta_0}^{-\frac{\pi}{2}} u\,\frac{d\,\theta}{\cos\theta},$$

qui est infinie : en effet la vitesse u est toujours finie entre les limites de l'intégration, et l'on a d'autre part

$$\int_{\theta_0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\theta}{\cos\theta} = -\infty.$$

Il faut donc un temps infini pour que la vitesse atteigne sa limite.

9. Si dans la valeur du temps, on multiplie simplement par u la quantité mise sous le signe $\int$, on aura l'expression de l'arc ; il en résulte que les conséquences relatives au temps ont leurs analogues, quand il s'agit de l'arc, pourvu qu'on ajoute une unité à l'exposant n.

Donc, *dans la branche négative, le point de la trajectoire où* $\mathrm{u} = \infty$ *est à une distance infinie de l'origine, quand* $\mathrm{f(u)}$ *est d'un degré inférieur ou égal au second; il se trouve, au contraire, situé à une distance finie de l'origine, quand* $\mathrm{f(u)}$ *est d'un degré supérieur au second.*

Lorsque l'arc est fini, le point, où $u = \infty$, est toujours un des points singuliers de la courbe : en effet, le second coefficient différentiel

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{(u\cos\theta)^2},$$

qu'on déduit de l'équation [10], n° 2, devient alors nul. La nature de ce point singulier dépend de la fonction $f(u)$, qui entre dans les coefficients différentiels successifs. La branche ultérieure répond toujours à un autre problème de mécanique, dans lequel, se trouve modifiée la direction, soit de la vitesse, soit de la résistance. Quelquefois il n'existe pas même de branche ultérieure, à moins qu'on ne donne une plus grande extension aux équations du mouvement établies ci-dessus.

L'arc qui aboutit au point où $u = 0$ est toujours fini, si $f(0) > 1$; mais si $f(0) = 1$, il est fini pour $n < 2$ et infini pour $n \geqq 2$, n étant un nombre qui rend finie l'expression

$$\frac{f(u) - 1}{u^n},$$

pour $u = 0$.

Il convient d'avertir que le point correspondant à $u = 0$ est également un point singulier de la courbe, puisqu'on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \infty,$$

quand $u = 0$.

Si $f(0) < 1$, l'arc correspondant à la vitesse minimum est fini, et infini celui qui correspond à la vitesse terminale.

Ainsi *la vitesse ne peut rigoureusement atteindre la limite vers laquelle elle converge incessamment, que quand l'espace parcouru est infini.*

10. On a vu (n° 7) que la tangente extrême de la branche négative de la courbe est verticale quand le degré de la résistance est égal à zéro, et inclinée quand il est plus grand que zéro; que celle de la branche positive est toujours verticale. Il est intéressant de rechercher, si ces tangentes extrêmes sont situées à une distance finie ou infinie de l'origine, ou, en d'autres termes, si la trajectoire a des asymptotes.

Commençons par la branche descendante, et voyons si la tangente extrême verticale rencontre l'axe des x à une distance finie; il suffit pour cela de rechercher quelle valeur prend l'intégrale

$$gx = -\int_{\theta_0}^{\theta} u^2 d\theta ,$$

déduite de l'équation [4], n° 2, quand on l'étend jusqu'à $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Or, il est clair que cette valeur de x est nécessairement finie, puisque u^2 est toujours fini dans les limites de l'intégration; donc *la branche descendante a une asymptote verticale.*

Quand la branche descendante de la courbe est finie, ce qui arrive toutes les fois que $f(0) > 1$, et quelquefois quand $f(0) = 1$, comme nous l'avons fait observer plus haut, bien que la tangente extrême soit située à une distance finie de l'origine, ce n'est toutefois pas une asymptote proprement dite.

Le cas de degré zéro, de la fonction $f(u)$, c'est-à-dire le

cas d'une résistance constante, n'est pas compris dans la discussion précédente, parce que la vitesse terminale devenant alors infinie, si $r < g$, on ne saurait décider, si l'intégrale précitée est finie ou infinie. Mais puisque alors les équations du mouvement peuvent s'intégrer, on voit immédiatement que pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, la valeur de x est finie, si $r > \frac{g}{2}$, et infinie, si $r \leqq \frac{g}{2}$; conséquemment, quand la résistance est constante, la courbe a une asymptote, si $r < g$ et $> \frac{g}{2}$, et n'en a pas, quand $r \leqq \frac{g}{2}$.

Si $r = g$, la vitesse terminale est finie, et la courbe a une asymptote.

Passons à l'autre extrémité de la courbe, et soit Θ l'angle limite de θ correspondant à $u = \infty$. La partie D de l'axe des y, comprise entre l'origine et le point de rencontre d'une tangente quelconque, est donnée par l'équation

$$D = y - x \operatorname{tang} \theta ;$$

en substituant à x et y leurs valeurs tirées des équations [4] et [5], n° 2, on obtient

$$g D = \operatorname{tang} \theta \int_{\theta_0}^{\theta} u^2 d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} u^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta .$$

Pour déterminer la position de l'asymptote, il faut faire converger θ vers Θ; de sorte qu'on a pour l'asymptote,

$$g D = \int_{\theta_0}^{\Theta} (\operatorname{tang} \Theta - \operatorname{tang} \theta) \, u^2 d\theta .$$

Si l'on substitue à $d\theta$ sa valeur en fonction de dt, tirée de l'équation [6], on trouve

$$D = \int_0^t \cos\theta\,(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\Theta)\,u\,dt\,.$$

A la limite inférieure $\theta = \theta_0$, $u = u_0$, $t = 0$; à la limite supérieure $\theta = \Theta$, $u = \infty$, $t = -\infty$, si le degré de la résistance $n \leqq 1$; et $t = -$ une quantité finie, si $n > 1$. Le produit

$$(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\Theta)\,u$$

est fini à l'origine et dans toute l'étendue de l'intégration, jusqu'à la limite supérieure, où il prend la forme indéterminée $0 \times \infty$. Pour en avoir la valeur à cette dernière limite, il suffit de le mettre sous la forme

$$\frac{\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}\Theta}{\frac{1}{u}},$$

et de différentier le numérateur et le dénominateur par rapport à la même variable θ. On obtient ainsi

$$-\frac{u^2}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{du} = -\frac{1}{\cos\theta\left\{\frac{f(u)}{u} + \frac{\sin\theta}{u}\right\}}.$$

Or, si l'on fait $\theta = \Theta$ et $u = \infty$, et si l'on se rappelle que $\Theta < \frac{\pi}{2}$, il est évident que cette fraction se réduit à une quantité infinie, quand $f(u)$ est d'un degré inférieur

au premier ; à une quantité finie, quand $f(u)$ est du premier degré ; et à zéro, quand le degré de $f(u)$ est plus grand que le premier.

Soit K une valeur moyenne entre les différentes valeurs que prend, entre les limites de l'intégration, le produit

$$\cos\theta\,(\text{tang}\,\theta - \text{tang}\,\Theta)\,u\,;$$

K est fini ou infiniment grand, si $n < 1$; fini, si $n = 1$; et fini ou infiniment petit, si $n > 1$.

Cela posé, donnant à l'intégrale la forme

$$D = K\int_0^t dt = Kt\,,$$

et en se rappelant que

$t = -\infty$, si $n \leqq 1$;

$t =$ — une quantité finie, si $n > 1$;

on en conclut que D est infini, si $n \leqq 1$, et qu'au contraire ce n'est pas une quantité infiniment grande, si $n > 1$.

Donc la tangente extrême, correspondante à $u = \infty$, est située à une distance infinie de l'origine, quand $f(u)$ est d'un degré inférieur ou égal au premier, et est située, au contraire, à une distance finie, quand $f(u)$ est d'un degré supérieur au premier.

Au delà du second degré la tangente extrême n'est pas, à proprement parler, une asymptote, la courbe ne s'étendant pas alors jusqu'à l'infini. Ainsi *il n'existe réellement d'asymptote que lorsque* f(u) *est d'un degré supérieur au premier, mais pas plus grand que le second.*

Le principe sur lequel est fondée la discussion précédente

relativement à l'angle, au temps, à l'arc et à la tangente qui correspondent à une vitesse infinie, dépend de la manière d'établir le degré d'une fonction. Or il existe, ainsi que je l'ai déjà indiqué en étudiant le mouvement rectiligne (4), des fonctions dont le degré ne saurait être déterminé par les règles ordinaires. Par exemple, les fonctions

$$x^\alpha \log x,\ x^\alpha \log\log x,\ x^\alpha (\log x)^\beta,\ x^\alpha (\log x)^\beta (\log\log x)^\gamma, \text{ etc.}$$

$$x^\alpha \, e^{\beta x}, \quad x^\alpha \, x^{\beta x}, \text{ etc.}$$

ainsi que celles qu'on obtiendrait par leurs combinaisons, ne sont point du degré n, parce que, quelle que soit la valeur de n, on aura toujours pour limite de la fraction $\frac{f(x)}{x^n}$, quand x converge vers l'infini, une quantité nulle ou infinie, et jamais une quantité finie, comme cela doit arriver, pour que $f(x)$ puisse se dire du degré n.

Pour la discussion de ces cas particuliers, on suivra une méthode analogue à celle que nous avons déjà employée; c'est-à-dire qu'on tâchera de décomposer la quantité mise sous l'intégrale en deux facteurs, dont l'un soit constamment fini dans les limites de l'intégration et que par suite on pourra mettre de côté. Alors le résultat, pour ce qui concerne la seule question de savoir, s'il est fini ou infini, sera fourni par l'intégrale de l'autre facteur.

11. L'étude de la variation du rayon de courbure aux différents points de la trajectoire est très-propre à en faire connaître la forme.

On a pour l'expression du rayon de courbure (n° 2, équation [7])

$$\rho = \frac{u^2}{g} \frac{1}{\cos\theta},$$

qui nous montre que le rayon de courbure est infini, quand $u = \infty$; qu'il va en diminuant jusqu'au sommet de la courbe, c'est-à-dire tant que $\theta > 0$, puisque u et $\frac{1}{\cos\theta}$ décroissent.

Au delà du sommet, u décroît encore, mais $\frac{1}{\cos\theta}$ croît; on ne peut donc, à la simple inspection, décider si ρ continue ou non à décroître. Pour le reconnaître, il suffit d'avoir recours au premier coefficient différentiel de ρ par rapport à θ et d'en examiner le signe. Or, on a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{2u}{g} \frac{1}{\cos\theta} \frac{du}{d\theta} + \frac{u^2}{g} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}.$$

En substituant à $\frac{du}{d\theta}$ sa valeur, il vient

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{u^2}{g\cos^2\theta} \left\{ 2f(u) + 3\sin\theta \right\}.$$

A partir du sommet, $\frac{d\rho}{d\theta}$ est positif; en conséquence ρ commence à varier dans le même sens que θ, c'est-à-dire qu'il décroît encore au delà du sommet; mais seulement jusqu'au point où θ satisfait à l'équation

$$2f(u) + 3\sin\theta = 0 ;$$

parce qu'au delà $\frac{d\rho}{d\theta}$ devient négatif, comme l'indique le signe positif du second coefficient différentiel à ce point, qui est

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} = \frac{\rho}{\cos^2\theta}\left\{\frac{2}{3}uf(u)f'(u) + 3\cos^2\theta\right\}.$$

Donc le rayon de courbure diminue jusqu'à atteindre une valeur minimum fournie par l'équation

$$2f(u) + 3\sin\theta = 0,$$

et va ensuite en croissant jusqu'à l'infini.

La valeur de $\frac{du}{d\theta}$ au point où le rayon de courbure est un minimum, se réduit à

$$\frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{2}u\,\text{tang}\,\theta.$$

Dans la branche descendante θ étant négatif, cette valeur de $\frac{du}{d\theta}$ sera positive; donc au point où la plus grande courbure a lieu, u et θ varient dans le même sens, c'est-à-dire que u décroît et n'a pas encore atteint son minimum, dont nous avons parlé ci-dessus (6). On en conclut que *le point du maximum de courbure est plus voisin du sommet que le point du minimum de vitesse.*

12. *La vitesse et le rayon de courbure sont plus grands dans la branche ascendante que dans la branche descendante, pour des inclinaisons égales, mais de signes contraires, de la courbe.* En effet l'équation [9], n° 2,

$$\frac{d(u\cos\theta)}{d\theta} = uf(u),$$

nous montre que la vitesse horizontale $u\cos\theta$ décroît en même temps que l'angle θ, c'est-à-dire qu'elle décroît, en s'avançant de la branche ascendante à la branche descendante: donc pour la même valeur de $\cos\theta$, u est plus grand quand le projectile monte, que lorsqu'il descend.

Quant au rayon de courbure, on arrive à la même conclusion par la simple inspection de l'expression

$$\rho = \frac{u^2}{g}\frac{1}{\cos\theta}.$$

13. La valeur de y étant donnée par l'équation

$$gy = -\int_{\theta_0}^{\theta} u^2 \operatorname{tang}\theta \, d\theta,$$

la plus grande hauteur à laquelle puisse s'élever le projectile se déduira de

$$gY = -\int_{\theta_0}^{0} u^2 \operatorname{tang}\theta \, d\theta = \int_{0}^{\theta_0} u^2 \operatorname{tang}\theta \, d\theta.$$

Si l'on désigne par θ' l'angle aigu sous lequel le projectile vient couper l'axe des x, c'est-à-dire l'*angle de chute*, on a

$$gY = \int_0^{-\theta'} u^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta :$$

en remplaçant θ par $-\theta$, dans cette intégrale, on obtient

$$gY = \int_0^{\theta'} u'^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta ,$$

où u' désigne la valeur de u qui correspond à $-\theta$. On a donc

$$\int_0^{\theta_0} u^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta = \int_0^{\theta'} u'^2 \operatorname{tang} \theta \, d\theta .$$

Or, en vertu de ce qu'on vient de démontrer, dans le paragraphe précédent, on a pour une même valeur de θ $u' < u$. Les éléments de la seconde intégrale sont donc plus petits que ceux de la première; en conséquence, pour que les deux intégrales soient égales, il est de toute nécessité que les limites de la première soient moins étendues que celles de la seconde, c'est-à-dire qu'il faut qu'on ait $\theta_0 < \theta'$. Donc *l'angle de chute est plus grand que l'angle de projection.*

14. Si dans l'équation [1]

$$\frac{du}{dt} = -r - g \sin \theta$$

on met $\frac{ds}{u}$ à la place de dt, on obtient

$$u\,du = -r\,ds - g\,dy.$$

En intégrant, à partir de $u = u_0$, $s = 0$, $y = 0$, on a

$$u^2 = u_0^2 - 2\int_0^s r\,ds - 2gy.$$

En désignant par u' la vitesse de chute et par s' la longueur de la trajectoire, comprise entre l'origine et le point de chute, on a

$$u'^2 = u_0^2 - 2\int_0^{s'} r\,ds;$$

d'où il suit que $u' < u_0$. Donc *la vitesse au point de chute est plus faible qu'au point de départ.*

15. On a

$$dx = \frac{dy}{\tang\theta}.$$

En désignant par x' l'amplitude de la branche ascendante, x'' celle de la branche descendante, Y la hauteur du tir, on a

$$x' = \int_0^{+Y} \frac{dy}{\tang\theta}.$$

$$x'' = \int_0^{-Y} \frac{dy}{\tang\theta}.$$

Qu'on mette $-dy$ et $-\theta'$ à la place de y et θ dans la

seconde intégrale, les limites en deviennent zéro et Y; et il en résulte

$$x'' = \int_0^Y \frac{dy}{\text{tang } \theta'},$$

où θ' désigne l'angle formé avec l'axe des x par l'élément de la courbe situé au même niveau que l'élément faisant l'angle θ. Or, attendu que $\theta < \theta'$ (13), les éléments de la seconde intégrale sont moindres que ceux de la première, et, puisque les limites sont les mêmes, on doit avoir $x' > x''$. Donc *l'amplitude de la branche ascendante est plus grande que celle de la branche descendante.*

CHAPITRE IV.

ANALYSE DE DEUX CAS DANS LESQUELS LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PROJECTILES SE RAMÈNENT AUX QUADRATURES.

16. Pour que les équations du mouvement d'un projectile, dans un milieu résistant, puissent se ramener aux quadratures, il est nécessaire et suffisant que la fonction $f(u)$, qui exprime la résistance, soit telle, qu'on puisse séparer les variables dans l'équation différentielle de premier ordre

$$du - u\left(\frac{\sin\theta + f(u)}{\cos\theta}\right)d\theta = 0,$$

qu'on tire de l'équation [8], n° 2.

Les formes de $f(u)$, qui permettent une telle séparation, sont peu nombreuses (*).

Jean BERNOULLI, le premier, dans *les Actes de Leipzig* (**), réduisit aux quadratures le problème balistique, quand $f(u) = au^n$; et d'Alembert, dans son *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (***), démontra que la réduction est encore possible quand

$$f(u) = a + bu^n,$$

et quand

$$f(u) = a + b \log u,$$

a, b, n étant des constantes quelconques.

Je me propose dans le présent chapitre d'examiner ces deux cas qui sont peu connus.

Soit

$$f(u) = a + bu^n,$$

l'équation différentielle précitée devient

$$du - u\left(\frac{a + \sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta - bu^{n+1}\frac{d\theta}{\cos\theta} = 0.$$

(*) Il est vrai, qu'il est peu de formes de $f(u)$ qui rendent possible l'intégration, en partant de certaines présuppositions sur la théorie de la résistance; mais, on peut, au contraire, en obtenir un nombre indéfini, si l'on ne se préoccupe pas de la conformité de la loi de la résistance avec ce qu'enseigne la pratique. En effet, étant donnée une relation quelconque entre la vitesse u et l'angle θ, on peut toujours, par ce qui a été dit au n° 2, déterminer, au moyen d'une simple différentiation, la loi de résistance nécessaire pour que cette relation ait lieu dans le mouvement du projectile. Or, comme il n'y a point de limite au nombre de relations qu'on peut imaginer entre u et θ, il en résulte qu'il existe une quantité indéfinie de lois de résistance, permettant l'intégration.

Si, au lieu de prendre pour point de départ la loi des vitesses, on part de la trajectoire, et qu'on cherche la loi de résistance nécessaire pour que le projectile soit assujetti à la parcourir, on a une autre source illimitée de formes de $f(u)$, aptes à rendre l'intégration possible.

(**) Pag. 216 (mai, 1719).

(***) Pag. 356 (1744).

Cette équation, qui a la forme de celle dite de Bernoulli, se réduit immédiatement à une équation linéaire, en divisant par u^{n+1} et faisant $u^{-n} = v$; on obtient, en effet, par ce procédé

$$dv + nv\left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta + nb\,\frac{d\theta}{\cos\theta} = 0;$$

dont l'intégrale est

$$v = e^{-n\int\left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta}\left[c - nb\int e^{n\int\left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta}\,\frac{d\theta}{\cos\theta}\right],$$

c étant une constante arbitraire.

On a donc

$$u = \frac{e^{\int\left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta}}{\left[c - nb\int e^{n\int\left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right)d\theta}\,\frac{d\theta}{\cos\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

La constante c se détermine en faisant correspondre une valeur donnée de θ à une valeur également donnée de u. En supposant qu'on ait à l'origine $\theta = \theta_0$ et $u = u_0$, on a, pour déterminer c, l'équation

$$u_0 = \frac{\varphi(\theta_0)}{\left[c - nb\psi(\theta_0)\right]^{\frac{1}{n}}},$$

où

$$\varphi(\theta) = e^{\int \left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta},$$

$$\psi(\theta) = \int \left\{\varphi(\theta)\right\}^n \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

On en tire

$$c = \left\{\frac{\varphi(\theta_0)}{u_0}\right\}^n + nb\,\psi(\theta_0),$$

et, par suite,

$$u = \frac{\varphi(\theta)}{\left[\left\{\frac{\varphi(\theta_0)}{u_0}\right\}^n + nb\left\{\psi(\theta_0) - \psi(\theta)\right\}\right]^{\frac{1}{n}}},$$

ou bien, si l'on veut,

$$u = \frac{e^{\int \left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta}}{\left[\left\{\frac{\varphi(\theta_0)}{u_0}\right\}^n + nb\int_{\theta}^{\theta_0} e^{n\int \left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta} \frac{d\theta}{\cos\theta}\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

On peut donner une autre forme à la valeur de u, en déterminant la constante c, par la condition qu'à $u = \infty$, corresponde $\theta = \Theta$. Alors toutes les fois que $\Theta < \frac{\pi}{2}$, ce qui a lieu toujours, pourvu que b ne soit pas nul (n° 7), on trouve

$$c = nb\,\psi(\Theta),$$

$$u = \frac{e^{\int \left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta}}{\left[nb \int_{\theta}^{\Theta} e^{n \int \left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta} \frac{d\theta}{\cos\theta} \right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Puisqu'on a

$$e^{\int \left(\frac{a+\sin\theta}{\cos\theta}\right) d\theta} = \frac{\operatorname{tang}^{a}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta},$$

il vient

$$u = \frac{\operatorname{tang}^{a}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\theta \left[nb \int_{\theta}^{\Theta} \frac{\operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^{n+1}\theta} d\theta \right]^{\frac{1}{n}}}.$$

Pour donner une forme algébrique à ces expressions, qu'on pose

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = z,$$

d'où l'on tire

$$\cos\theta = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad d\theta = \frac{2dz}{1+z^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation précédente et appelant Z la valeur de z, qui correspond à $\theta = \Theta$, il vient

$$u = \frac{\left(1+z^2\right) z^{a-1}}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n \, z^{n(a-1)-1}\, dz\right]^{\frac{1}{n}}}.$$

L'intégrale qui se trouve au dénominateur s'exprime en termes finis et par conséquent aussi la vitesse u, toutes les fois que n est un nombre entier; ou, s'il est fractionnaire, quand $\frac{n(a-1)}{2}$ ou $\frac{n(a+1)}{2}$ est un nombre entier.

L'expression de u en fonction de z prend une forme simple quand

$$n = \frac{2}{a-1} :$$

en effet, on a alors

$$\frac{b}{a+1} u^{\frac{2}{a-1}} = \frac{(1+z^2)^{\frac{2}{a-1}} z^2}{(1+Z^2)^{\frac{a+1}{a-1}} - (1+z^2)^{\frac{a+1}{a-1}}}.$$

En introduisant la valeur de u en fonction de z, dans les formules suivantes (n° 2):

$$g\,ds = -u^2 \frac{d\theta}{\cos\theta} = -u^2 \frac{dz}{z},$$

$$g\,dx = -u^2\, d\theta = -2u^2 \frac{dz}{1+z^2},$$

$$g\,dy = -u^2 \operatorname{tang}\theta\, d\theta = u^2 \frac{1-z^2}{1+z^2} \cdot \frac{dz}{z},$$

$$g\,dt = -u \frac{d\theta}{\cos\theta} = -u \frac{dz}{z},$$

$$g\rho = u^2 \frac{1}{\cos\theta} = u^2 \frac{1+z^2}{2z},$$

on obtient les expressions

$$gs = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)^2 z^{2a-3}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}},$$

$$gx = \int_z^{z_0} \frac{2(1+z^2) z^{2(a-1)}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}},$$

$$gy = \int_{z_0}^{z} \frac{(1-z^4) z^{2a-3}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}},$$

$$gt = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2) z^{a-2}\,dz}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{1}{n}}},$$

$$2g\rho = \frac{(1+z^2)^3 z^{2a-3}}{\left[nb\int_z^Z (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\,dz\right]^{\frac{2}{n}}};$$

qui fournissent les valeurs de s, x, y, t, ρ en fonction de z, ou, si l'on veut, en fonction de θ, au moyen des seules quadratures.

Il faut remarquer qu'entre z_0 et Z, on a la relation

$$u_0 = \frac{(1+z_0^2)\, z_0^{a-1}}{\left[nb \int_{z_0}^{Z} (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\, dz \right]^{\frac{1}{n}}},$$

ou bien

$$nb \int_{z_0}^{Z} (1+z^2)^n z^{n(a-1)-1}\, dz = \left[\frac{(1+z_0^2)\, z_0^{a-1}}{u_0} \right]^n$$

$$= \frac{2^n \operatorname{tang}^{na} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2} \right)}{u_0^n \cos^n \theta_0},$$

qui sert à déterminer Z, quand les circonstances initiales du mouvement sont définies.

17. Les quadratures indiquées ci-dessus s'obtiennent sous forme finie dans les cas particuliers suivants:

Celle qui donne s, quand

$n = 0$, quel que soit a;

$n = 1$, pourvu que a soit rationnel, et différent de ± 1;

$n = 2$, quel que soit a;

$n = \frac{2}{p}$, pourvu qu'on ait $a = pq \pm 1$ (p et q étant deux nombres entiers).

Celles qui donnent x et y, quand

$n = 0$, quel que soit a;

$n = 1$, pourvu que a soit rationnel et différent de ± 1;

$n=2$, pourvu que a soit rationnel et différent de zéro et de ± 1;

$n=\frac{2}{p}$, pourvu qu'on ait $a=pq\pm 1$ (p et q étant deux nombres entiers).

Celle qui donne t, quand

$n=0$, quel que soit a;

$n=1$, quel que soit a;

$n=\frac{1}{p}$, pourvu qu'on ait $a=2pq\pm 1$ (p et q étant deux nombres entiers).

Le cas de $n=2$ est le plus important à considérer, parce qu'une résistance, en partie constante et en partie proportionnelle au carré de la vitesse, paraît convenir aux milieux solides, tels que les murailles, les bois, les terres, etc., comme l'on verra plus tard.

Dans ce cas., le dénominateur commun devient:

$$\int_z^Z (1+z^2)^{\frac{1}{2}} z^{2a-2}\, dz$$

$$=\frac{Z^{2(a-1)}}{2(a-1)}+\frac{Z^{2a}}{a}+\frac{Z^{2(a+1)}}{2(a+1)}-\frac{z^{2(a-1)}}{2(a-1)}-\frac{z^{2a}}{a}-\frac{z^{2(a+1)}}{2(a+1)}.$$

Il s'ensuit que quand a est rationnel et différent de zéro et de ± 1, les expressions de x, y ont la forme de fractions rationnelles, qu'on peut intégrer en termes finis, au moyen des logarithmes, ou des arcs de cercle, après qu'on les aura décomposées en fractions partielles ayant pour dénominateurs les facteurs binômes ou trinômes du dénominateur commun.

Il est inutile d'avertir que, si a est fractionnaire et égal

à $\frac{p}{q}$, on doit égaler $z^{\frac{1}{q}}$ à une nouvelle variable, pour rendre rationnel le dénominateur.

Ce dénominateur n'est plus algébrique, toutes les fois que $a=0$ ou $a=\pm 1$; en effet, dans le premier cas, on a

$$\frac{Z^{2a}}{a}-\frac{z^{2a}}{a}=\infty-\infty=2\log\frac{Z}{z},$$

et dans le second,

$$\frac{Z^{2(a\mp 1)}}{2(a\mp 1)}-\frac{z^{2(a\mp 1)}}{2(a\mp 1)}=\log\frac{Z}{z}.$$

Alors les valeurs de x et y ne peuvent plus s'obtenir en termes finis.

Il arrive donc que, tandis qu'on ne peut obtenir les valeurs finies des coordonnées de la trajectoire dans le cas plus simple de la résistance proportionnelle seulement au carré de la vitesse, on a, au contraire, en termes finis, les valeurs de ces coordonnées dans le cas plus général, dans lequel au terme qui contient le carré de la vitesse, on en ajoute un autre constant, rationnel et différent de l'unité. Ce qui s'explique aisément, en remarquant que le degré de l'équation à résoudre, pour décomposer le dénominateur, s'élève à mesure que a devient une fraction plus petite et que cette équation est de degré infini, pour $a=0$.

18. Avant d'abandonner le cas d'une résistance composée de deux termes, je dois parler d'une relation remarquable qui existe entre la trajectoire décrite dans un milieu dont la résistance est exprimée par a, et les trajectoires

décrites dans des milieux dont les résistances ont pour expressions

$$a+bu \qquad \text{et} \qquad a+bu^2.$$

Pour $n=1$, la formule, qui donne le temps, devient

$$bgt=\int_z^{z_0}\frac{(1+z^2)\,z^{a-2}\,dz}{\int_z^Z(1+z^2)\,z^{a-2}\,dz},$$

dans laquelle le numérateur est la différentielle exacte du dénominateur pris avec le signe contraire. Donc

$$bgt=\int_{z_0}^{z} d\log\int_z^Z(1+z^2)\,z^{a-2}\,dz\,;$$

d'où l'on tire, en effectuant l'intégration entre z_0 et z,

$$bgt=\log\left\{\frac{\int_z^Z(1+z^2)\,z^{a-2}\,dz}{\int_{z_0}^Z(1+z^2)\,z^{a-2}\,dz}\right\}.$$

En scindant l'intégrale supérieure en deux autres, l'une entre z et z_0, l'autre entre z_0 et Z, et remplaçant l'intégrale inférieure par sa valeur trouvée plus haut en fonction de données initiales, il vient

$$bgt=\log\left\{1+\frac{bu_0\cos\theta_0}{2z_0{}^a}\int_z^{z_0}(1+z^2)\,z^{a-2}\,dz\right\},$$

et par suite

$$e^{bgt} = 1 + \frac{b u_0 \cos\theta_0}{2 z_0^a} \int_z^{z_0} (1 + z^2)\, z^{a-2}\, dz .$$

Pour avoir le temps dans le cas d'un milieu de résistance constante, il suffit de faire $b = 0$ dans cette expression, après avoir développé l'exponentielle. En désignant ce temps par t', on aura

$$g t' = \frac{u_0 \cos\theta_0}{2 z_0^a} \int_z^{z_0} (1 + z^2)\, z^{a-2}\, dz ;$$

d'où l'on tire la relation

$$e^{bgt} = 1 + b g t' ,$$

entre les temps employés par deux projectiles égaux pour décrire deux arcs également inclinés à leurs extrémités, dans deux milieux, dont les résistances ont pour expressions $a + b u$ et a.

Quand $t' = -\frac{1}{bg}$, on aura $t = -\infty$. Donc, en prenant sur la courbe décrite dans le milieu de résistance constante un arc parcouru dans le temps $-\frac{1}{bg}$, et menant une tangente à son extrémité, celle-ci sera parallèle à la tangente extrême de l'autre courbe prolongée jusqu'à l'infini.

19. Dans le cas de $n = 2$, la formule qui donne l'arc s se réduit de la même manière à

$$e^{2bgs} = 1 + \frac{b}{2} \left(\frac{u_0 \cos\theta_0}{z_0^a} \right)^2 \int_z^{z_0} (1 + z^2)\, z^{2a-3}\, dz .$$

Si l'on désigne par s' l'arc décrit, dans un milieu de résistance constante, on trouve, en faisant $b=0$,

$$2gs' = \frac{1}{2}\left(\frac{u_0 \cos\theta_0}{z_0^a}\right)^2 \int_z^{z_0} (1+z^2)\, z^{2a-3}\, dz.$$

On en déduit

$$e^{2bgs'} = 1 + 2bgs'.$$

Lorsque

$$s' = -\frac{1}{2bg},$$

il vient

$$s = -\infty.$$

Si donc, on prend, sur la trajectoire décrite dans un milieu de résistance constante, un arc égal à $-\frac{1}{2bg}$, la tangente à son extrémité est parallèle à l'asymptote inclinée de la trajectoire décrite dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse, plus la même constante.

Quand $a=0$, la courbe décrite dans le milieu de résistance constante se transforme en une parabole, et alors on retombe sur la relation connue qui existe entre la trajectoire dans le vide et celle qui est décrite dans un milieu résistant en raison du carré de la vitesse ; relation qui n'est, comme on le voit, qu'un cas particulier de celle que nous venons de démontrer et qui, nous le croyons, ne se trouve encore dans aucun autre ouvrage. On peut en dire autant de la relation trouvée dans le numéro précédent.

20. Lorsqu'on pose

$$f(u) = a + b \log u,$$

il vient

$$\log u = \left(\log u_0 + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{z}{z_0}\right)^b - \frac{a}{b} - z^b \int_{z_0}^{z} \frac{1 - z^2}{1 + z^2} z^{-b-1}\, dz,$$

où l'on a fait, comme plus haut,

$$z = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right).$$

La valeur de u est finie, toutes les fois que b est entier.

Ayant ainsi déterminé u en fonction de z, les formules données plus haut fourniront les expressions de s, x, y, t, ρ en fonction de la même variable, au moyen des quadratures.

Je ne m'étendrai pas davantage sur cette hypothèse, qui est plus géométrique que physique.

CHAPITRE V.

MÉTHODES D'APPROXIMATION.

21. Quoique les équations du mouvement d'un projectile, dans un milieu résistant, ne soient intégrables que dans quelques cas particuliers, on peut néanmoins toujours calculer *numériquement*, avec une approximation indéfinie, les diverses circonstances du mouvement. Et cela, non-seulement lorsque la fonction de la vitesse, exprimant la loi de la résistance du milieu, est définie *analytiquement;* mais encore quand la résistance n'est connue qu'au moyen de *l'observation;* c'est-à-dire, au moyen d'une table numérique où se trouvent, d'une part les valeurs très-voisines et fort multipliées de la vitesse, et de l'autre, les valeurs correspondantes de la résistance, telles que les fournirait une série d'expériences assez nombreuses pour éliminer des résultats moyens les erreurs inhérentes à l'expérimentation.

Je suppose qu'ayant une pareille table, pour un milieu résistant déterminé, on veuille déterminer le mouvement d'un projectile dans ce milieu.

L'équation différentielle de premier ordre (équation [9], n° 2),

$$d(u\cos\theta) = uf(u)\,d\theta,$$

qui lie les variations infinitésimales de la vitesse à celles de l'angle de la courbe, nous offre toujours le moyen de calculer *arithmétiquement*, avec une approximation illimitée, la valeur de u correspondante à une valeur donnée de θ; et cela, quelle que soit la fonction $f(u)$, pourvu qu'elle soit continue entre les limites de l'intégration.

En effet, quand on a une équation différentielle

$$dy = F(x, y)\,dx,$$

en même temps que la valeur particulière y_0 de la fonction y, correspondante à la valeur particulière x_0 de la variable x, on peut calculer approximativement une autre valeur Y de y, correspondante à une autre valeur X de x. A cet effet, il faut intercaler, entre les limites x_0, X, une série croissante ou décroissante de nouvelles valeurs de x et y faire correspondre une série de nouvelles valeurs de y calculées de manière que, si

$$x, x + \Delta x$$

sont deux valeurs consécutives de x, et si

$$y, y + \Delta y$$

sont les valeurs correspondantes de y, on ait généralement

$$\Delta y = F(x, y)\,\Delta x.$$

On démontre que la dernière des valeurs de y, ainsi calculées, ou celle qui répond à la valeur X de x, diffère de la véritable valeur de y, qu'on obtiendrait en faisant décroître indéfiniment les valeurs numériques de Δx, d'une quantité moindre que le produit

$$\left(\frac{B + AC}{2}\right)\left[\frac{(1 + C\delta)^n - 1}{C}\right]\delta\,; \quad (*)$$

où A, B, C sont trois nombres respectivement supérieurs aux valeurs numériques des trois fonctions

$$F(x, y), \qquad \frac{dF(x, y)}{dx}, \qquad \frac{dF(x, y)}{dy}$$

entre les limites $x = x_0$, et $y = y_0$, $x = X$, $y = Y$; n désigne le nombre d'éléments dans lesquels l'intervalle $X - x_0$ a été divisé; δ un nombre supérieur à chacune des valeurs de Δx, abstraction faite du signe.

Si l'on veut calculer la valeur Y de y, correspondante à $x = X$, avec un degré donné d'approximation, par exemple, de manière que l'erreur commise soit inférieure à une unité décimale de l'ordre m, il suffira d'attribuer aux

(*) Cette expression de la limite de l'erreur commise est due à A. Cauchy. Voyez, pour la démonstration, la 23e leçon du *Calcul intégral* de Moigno, ou bien un Mémoire de Coriolis, inséré dans le tome 2e du *Journal de Mathématiques* de Liouville.

éléments Δx de la différence $X - x_0$ une valeur telle qu'on ait

$$\delta < \frac{2C}{(10)^m (B + AC)\left[(1 + C\delta)^n - 1\right]}.$$

En appliquant cette méthode à l'équation

$$d(u \cos\theta) = u f(u)\, d\theta,$$

on pourra calculer une série u_0, u_1, u_2, u_3,..... de valeurs de u, correspondante à une série θ_0, θ_1, θ_2, θ_3..... de valeurs de θ. Cela fait, il sera facile, au moyen des équations

$$g\,ds = -u^2 \frac{d\theta}{\cos\theta},$$

$$g\,dx = -u^2\, d\theta,$$

$$g\,dy = -u^2 \operatorname{tang}\theta\, d\theta,$$

$$g\,dt = -u \frac{d\theta}{\cos\theta},$$

d'obtenir les valeurs de s, x, y, t, à l'aide des quadratures.

Les formes diverses sous lesquelles on peut mettre l'équation différentielle entre u et θ, ne sont pas également propres à fournir une grande approximation. La forme la plus convenable pour chaque cas particulier dépend de la nature de la fonction $f(u)$.

Lorsqu'il s'agit de la résistance de l'air, on sait que, dans les mouvements assez lents, la résistance croît moins

vite que le carré de la vitesse, et que le contraire a lieu dans les mouvements très-rapides ; mais que, dans les vitesses moyennes, la résistance ne s'éloigne guère de la loi du carré de la vitesse.

Donc, pour les vitesses ordinaires des projectiles de l'artillerie, la fonction

$$\frac{f(u)}{u^2}$$

ne varie que dans des limites assez restreintes.

Dans un pareil cas il convient de donner à l'équation la forme

$$\frac{d(u\cos\theta)}{u^3\cos^3\theta} = \frac{f(u)}{u^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^3\theta},$$

et de poser

$$y = \left(\frac{1}{u\cos\theta}\right)^2, \qquad x = 2\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta};$$

l'équation devient alors

$$dy = -\frac{f(u)}{u^2}\,dx.$$

La valeur de u ne peut s'exprimer explicitement en fonction de x et y ; mais cela ne fait aucune difficulté, parce qu'on a des tables de l'intégrale

$$x = 2\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta^2} + \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right),$$

avec lesquelles on peut toujours trouver les valeurs de x et de y, lorsque θ et u sont donnés, et réciproquement.

Soient x_0, y_0 les valeurs initiales de x et y, qui correspondent à $\theta = \theta_0$, $u = u_0$. Si x devient $x_0 + \Delta x$, on a

$$\Delta y_0 = -\frac{f(u_0)}{u_0^2}\,\Delta x\,,$$

et par suite

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = y_0 - \frac{f(u_0)}{u_0^2}\,\Delta x.$$

Mettant à la place de y sa valeur en u et θ, on trouve

$$\left(\frac{1}{u_1 \cos\theta_1}\right)^2 = \left(\frac{1}{u_0 \cos\theta_0}\right)^2 - \frac{f(u_0)}{u_0^2}\,\Delta x\,;$$

d'où l'on tire

$$u_1^2 = \frac{\dfrac{\cos^2\theta_0}{\cos^2\theta_1}\,u_0^2}{1 - f(u_0)\cos^2\theta_0 \,.\, \Delta x}.$$

On trouve de même

$$u_2^2 = \frac{\dfrac{\cos^2\theta_1}{\cos^2\theta_2}\,u_1^2}{1 - f(u_1)\cos^2\theta_1 \,.\, \Delta x}\,,$$

et ainsi de suite.

De cette façon, on peut calculer les valeurs successives de u_1, u_2, u_3,..... Et puisque

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2\int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = x_2 - x_1 = 2\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \text{etc.},$$

si l'on prend Δx constant, la table de l'intégrale fera connaître les valeurs successives θ_1, θ_2, θ_3,.....

L'erreur commise dans le calcul de la dernière valeur

$$y_n = \left(\frac{1}{u_n \cos \theta_n}\right)^2$$

de y, est moindre que

$$\left(\frac{B + AC}{2}\right)\left[\frac{(1 + C\delta)^n - 1}{C}\right]\delta,$$

δ étant égal à Δx, et A, B, C désignant trois nombres égaux aux plus grandes valeurs numériques que reçoivent les fonctions

$$F = \frac{f(u)}{u^2},$$

$$\frac{dF}{dx} = \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \sin\theta \cos^2\theta,$$

$$\frac{dF}{dy} = \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \frac{du}{dy} = -\frac{1}{2} u^3 \left[\frac{f(u)}{u^2}\right]' \cos^2\theta,$$

pendant qu'on y fait varier θ entre les limites θ_0, θ_n, et u entre les limites u_0, u_n.

Au lieu de faire varier x en progression arithmétique, c'est-à-dire de prendre Δx constant, on pourrait prendre $\Delta\theta$ constant, et alors Δx serait variable.

Ayant obtenu les valeurs successives de u qui correspondent à celles de θ, on peut en déduire les valeurs successives de l'arc, des coordonnées de la courbe et du temps, au moyen des équations

$$\Delta s = -\frac{u^2}{g}\frac{\Delta\theta}{\cos\theta},$$

$$\Delta x = -\frac{u^2}{g}\Delta\theta,$$

$$\Delta y = -\frac{u^2}{g}\operatorname{tang}\theta\,\Delta\theta,$$

$$\Delta t = -\frac{u}{g}\frac{\Delta\theta}{\cos\theta}.$$

En partant de l'angle de projection θ_0, et effectuant le calcul jusqu'à $\theta = 0$, on pourra construire une table divisée en six colonnes, dans laquelle la première comprendra les inclinaisons successives de la courbe aux différents points; la seconde, les vitesses en ces points; la troisième, les arcs compris entre deux inclinaisons consécutives; la quatrième et la cinquième, les projections de ces arcs sur les axes des x et des y; enfin la sixième, les Δt. En faisant la somme des Δx et des Δy, on aura l'amplitude et l'élévation de la branche ascendante; ajoutant les Δt, on aura la durée de l'ascension. En faisant ensuite θ négatif, on pourra prolonger le calcul aussi loin qu'on voudra. En additionnant les Δy, jusqu'à ce que leur somme soit égale à la hauteur du tir, puis les Δx, on aura l'amplitude de la branche descendante. La seconde colonne donnera la vitesse au point de chute, et la première, l'angle de chute. La durée totale du trajet sera fournie par la somme des Δt, depuis l'angle de départ, jusqu'à l'angle de chute.

Il serait très-facile d'avoir égard à la diminution de la densité de l'air, à mesure que le projectile s'élève; il suffirait pour cela de faire varier la densité qui doit entrer

dans la fonction $f(u)$, en passant d'un élément à l'autre de la trajectoire. On aurait la densité relative à chaque élément, en introduisant la valeur trouvée de y dans la formule qui exprime la diminution de la densité aux différentes hauteurs.

Par ce procédé, on pourra déterminer toutes les circonstances du mouvement d'un projectile dans un milieu dont on connaît la résistance en fonction de la vitesse, que cette fonction soit définie *analytiquement* ou *empiriquement*. La seule difficulté à vaincre serait la longueur des calculs à effectuer; mais, pour les projectiles en usage dans l'artillerie, dont les vitesses et les angles de départ sont compris entre des limites assez rapprochées, on pourrait réduire à un petit nombre les cas à calculer, et faire dépendre d'un nombre restreint de tables, calculées une fois pour toutes, la solution d'un problème quelconque sur le tir des projectiles.

La construction de pareilles tables ne coûterait certainement pas plus de travail que n'en ont coûté les tables calculées par GRÆWENITZ (*), BROWN (**), M. OTTO (***) et par d'autres, dans l'hypothèse d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse; car les formules que je propose coïncident en somme avec celles qu'on emploie dans l'hypothèse ordinaire de la résistance en raison du carré de la vitesse.

(*) *Henning Friedrichs Grafen v.* GRÆWENITZ, *Akademische Abhandlung von der Bahn der Geschützkugeln.* Rostock, 1764. Ce mémoire a été traduit en français par M. Rieffel, sous le titre: *Mémoire sur la trajectoire des projectiles de l'artillerie.* Paris, 1845.

(**) HUGH BROWN, *The true principles of Gunnery investigated and explained.* London, 1777.

(***) OTTO, *Tafeln für den Bombenwurf.* Berlin, 1842.

Naturellement, avant de se livrer à un pareil travail, il serait nécessaire de connaître parfaitement la fonction $f(u)$.

Pour donner un exemple de l'application des formules exposées, je calculerai, dans une Note à la fin de cet écrit, un cas particulier, en prenant, pour exprimer la résistance, deux termes respectivement proportionnels au carré et au cube de la vitesse.

Les formules ci-dessus mentionnées, convenables pour les grandes vitesses des projectiles de l'artillerie, cessent de l'être, quand il s'agit de petites vitesses inférieures à $^1/_4$ de mètre. Pour ces vitesses, la résistance est approximativement proportionnelle à la simple vitesse, et alors il convient de supposer $\frac{f(u)}{u}$ constant, et de donner à l'équation différentielle la forme

$$\frac{d(u\cos\theta)}{u^2\cos^2\theta} = \frac{f(u)}{u}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

En désignant par u_0 et u_1 deux vitesses, dans l'intervalle desquelles, on puisse faire

$$\frac{f(u)}{u} = a$$

constant, on aura, pour calculer l'arc compris entre elles, les formules

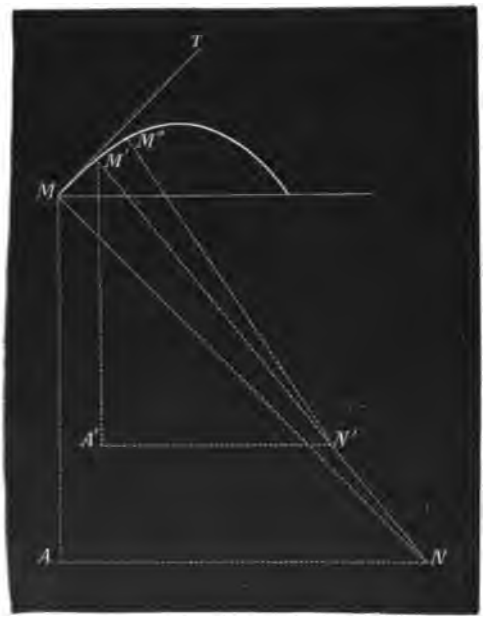
$$\frac{1}{u_1\cos\theta_1} = \frac{1}{u\cos\theta_0} + a(\operatorname{tang}\theta_0 - \operatorname{tang}\theta_1),$$

$$agx = u_0\cos\theta_0 - \frac{u_0\cos\theta_0}{1 + au_0\cos\theta_0(\operatorname{tang}\theta_0 - \operatorname{tang}\theta_1)},$$

$$y = x\left(\operatorname{tang}\theta_0 + \frac{1}{a u_0 \cos\theta_0}\right) + \frac{1}{a^2 g}\log\left(1 - \frac{agx}{u_0\cos\theta_0}\right),$$

$$agt = \log\{1 + a u_0 \cos\theta_0 (\operatorname{tang}\theta_0 - \operatorname{tang}\theta_1)\}.$$

22. La série des valeurs consécutives de la vitesse qui correspond à la série des valeurs consécutives de l'inclinaison de la courbe peut servir à décrire graphiquement la trajectoire. Pour cela on opérera de la manière suivante :



Soit M le point de départ du projectile, MT sa direction initiale. Sur la verticale MA, menée par le point M, portez de M en A la longueur $2h_0$ (h est la hauteur due à la vitesse u, de sorte qu'on a $h = \frac{u^2}{2g}$) ; au point A menez une horizontale jusqu'à sa rencontre avec la normale MN, on aura

$$MN = \frac{2h_0}{\cos\theta_0}.$$

Or, l'expression du rayon du cercle osculateur est (n° 2, équation [7])

$$\rho = \frac{2k}{\cos\theta},$$

donc MN est égal à ce rayon. Par conséquent, si du centre N on décrit, avec un rayon MN, un arc de cercle MM' égal à $MN\,(\theta_1 - \theta_0)$, on aura un élément de la trajectoire.

Répétez au point M' les mêmes opérations exécutées au point M, et vous aurez un second élément $M'M''$ de la courbe. Et ainsi de suite, on pourra tracer la courbe par une série d'arcs de cercle (*).

23. Si dans l'équation

$$d\,(u\cos\theta) = u f(u)\,d\theta,$$

dont dépend la solution du problème balistique, on pouvait substituer à la fonction $f(u)$ cette autre fonction

$$\frac{f(\alpha u\cos\theta)}{\alpha\cos\theta},$$

α étant une constante choisie convenablement, les variables seraient immédiatement séparables. Or, si l'angle θ, dans toute l'étendue de la courbe que l'on considère, varie dans des limites assez restreintes, on peut faire cette substitution

(*) Une construction de la trajectoire des projectiles au moyen de cercles osculateurs, analogue à celle-ci, est indiquée par Poncelet dans la *Mécanique industrielle*. Bruxelles, 1839.

sans grande erreur, pourvu qu'on donne à α une valeur telle que le produit $\alpha \cos\theta$ s'éloigne le moins possible de l'unité pour toutes les valeurs qu'il acquiert entre $\theta = \theta_0$ et θ.

En opérant cette substitution, on obtient l'équation

$$d(u\cos\theta) = u\frac{f(\alpha u\cos\theta)}{\alpha\cos\theta}d\theta,$$

laquelle, si l'on pose $\alpha u\cos\theta = v$, se transforme en

$$\frac{\alpha dv}{vf(v)} = \frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

où les variables sont séparées ; elle fournit immédiatement

$$\text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\theta_0 + \alpha\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{vf(v)},$$

qui sert à lier la vitesse à l'angle.

En substituant, dans l'équation

$$g\,dx = -u^2 d\theta = -(u\cos\theta)^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

la valeur déjà trouvée de $\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$, il vient

$$\alpha g x = -\int_{v_0}^{v}\frac{v\,dv}{f(v)}.$$

De cette équation on pourra tirer la valeur de v en fonction de x, quand l'intégration sera effectuée.

Je suppose qu'ayant exécuté cette opération, on ait

$$\frac{1}{v^2} = F(x).$$

Pour trouver l'équation de la trajectoire, on aura recours à l'équation

$$g\,dx = -(u\cos\theta)^2\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta},$$

qui donne

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = -g\,\frac{dx}{(u\cos\theta)^2} = -\alpha^2 g\,\frac{dx}{v^2} = -\alpha^2 g\,F(x)\,dx.$$

En intégrant et observant qu'à l'origine $\theta = \theta_0$ et $x = 0$, on aura

$$\text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\theta_0 - \alpha^2 g\int_0^x F(x)\,dx.$$

En remplaçant *tang* θ par sa valeur $\frac{dy}{dx}$, et intégrant une seconde fois, de manière qu'à $x=0$ réponde $y=0$, on trouve

$$y = x\,\text{tang}\,\theta_0 - \alpha^2 g\int_0^x dx\int_0^x F(x)\,dx.$$

Le temps se détermine, en mettant dans l'équation

$$\alpha g\,dx = -\frac{v\,dv}{f(v)},$$

au lieu de $\alpha\,dx$, sa valeur $v\,dt$; de sorte qu'il vient

$$g\,t = -\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{f(v)}.$$

La méthode que je viens d'exposer pour trouver les équations du mouvement est fondée sur la substitution de la fonction

$$\frac{f(\alpha\varpi\cos\theta)}{\alpha\cos\theta}$$

à la fonction $f(u)$, qui exprime la résistance. Si l'on avait

$$f(u) = au,$$

c'est-à-dire si la résistance était proportionnelle à la simple vitesse, les équations qu'on vient de trouver seraient exactes; mais, dans toute autre hypothèse sur la résistance, cette méthode ne conduit qu'à des formules approximatives, dont le degré d'approximation est d'autant plus grand que les limites entre lesquelles varie l'angle θ sont plus resserrées.

M. Didion, en traitant du mouvement des projectiles dans un milieu qui résiste en raison de la seconde et de la troisième puissance de la vitesse, arrive, par une autre voie, à des formules qui se déduisent immédiatement des équations exposées plus haut en y introduisant cette loi de résistance.

Il voudrait étendre ses formules au tir élevé, ce que je ne considère pas comme permis, à moins qu'on ne divise la trajectoire en un grand nombre d'arcs et qu'on fasse varier la constante α d'un arc à l'autre; ce qui revient à calculer la courbe par points, et, dans ce cas, je crois plus avantageux d'employer la première méthode d'approximation que j'ai exposée (n° 21).

En effet, la fonction

$$\frac{\alpha\cos\theta f(\varpi)}{f(\alpha\varpi\cos\theta)},$$

qu'on suppose constante et égale à l'unité dans les limites de l'intégration, varie trop quand l'angle de projection est assez grand.

M. Didion adopte, pour la résistance,

$$f(u) = \frac{u^2}{2gc}\left(1+\frac{u}{r}\right);$$

de sorte que la fonction qu'on suppose constante est

$$\frac{1}{a\cos\theta}\cdot\frac{1+\frac{u}{r}}{1+\frac{au\cos\theta}{r}}.$$

Si l'angle de départ est égal à 45°, le premier facteur seul varie dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1, c'est-à-dire de 1,4 à 1 environ, en passant de l'origine au sommet; et il varie encore plus en passant du sommet au point de chute.

On obtient un plus grand degré d'approximation, en se servant de la première méthode que j'ai donnée (n° 21), même quand on calcule toute la trajectoire en une seule fois; ce qui équivaut à l'hypothèse de la résistance proportionnelle seulement au carré de la vitesse. En effet, la fraction $\frac{f(u)}{u^2}$ devient, dans l'hypothèse de résistance adoptée par M. Didion,

$$\frac{1}{2gc}\left(1+\frac{u}{r}\right);$$

où $r=833^m$ pour les bombes: si la vitesse initiale u_0 est égale à 150^m (une des plus grandes vitesses qu'on donne en pratique aux bombes), cette fonction, dans toute l'étendue de la trajectoire, ne varie qu'entre les limites 1,1 et 1.

Il reste à déterminer la valeur de la constante α. Elle doit avoir une valeur telle que le produit $\alpha \cos\theta$ s'éloigne le moins possible de l'unité pour toutes les valeurs qu'il prend entre $\theta = \theta_0$ et θ. Donc α doit avoir une valeur moyenne entre celles que reçoit $\frac{1}{\cos\theta}$ entre les mêmes limites.

Quand l'angle de départ est faible, et c'est le seul cas dans lequel on puisse calculer, avec une certaine approximation, toute la trajectoire avec une seule valeur de α, alors θ est constamment petit dans toute l'étendue de la courbe située au-dessus de l'axe des x; et par suite $\frac{1}{\cos\theta}$ s'éloigne peu de l'unité. Il est alors plus simple de prendre $\alpha = 1$.

Quand, pour un angle de départ un peu plus grand, on veut calculer la courbe en plusieurs parties, on peut prendre, pour chaque arc, α égal à la moyenne des sécantes des angles formés par les tangentes extrêmes.

M. Didion fait

$$\alpha = \frac{\xi(\theta_0) - \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\theta_0 - \operatorname{tang}\theta},$$

où

$$\xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}. \quad (*)$$

(*) On peut faire voir facilement que la valeur de α ainsi déterminée est une moyenne entre les différentes valeurs que prend $\frac{1}{\cos\theta}$ entre les limites $\theta = \theta_0$ et θ. On sait, en effet, que la fraction

$$\frac{a + a' + a'' + \text{etc.}}{b + b' + b'' + \text{etc.}}$$

est une moyenne entre les suivantes

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \text{etc.}$$

24. Plusieurs auteurs ont essayé d'exprimer les quantités nécessaires pour la connaissance du mouvement des projectiles, à l'aide de séries développées suivant les puissances ou de l'abscisse, ou du temps, ou d'une autre variable. Mais les séries qu'ils ont obtenues ne sont généralement pas convergentes et ne le deviennent qu'entre certaines limites : ce qui les rend peu utiles à la pratique. Néanmoins, une pareille méthode peut être appliquée avec assez de succès quand l'angle de départ est excessivement petit.

Au moyen des équations différentielles du n° 2 et de leurs dérivées successives, il n'y a aucune difficulté à développer, par la formule de Maclaurin, les quantités que l'on cherche, en séries ordonnées suivant les puissances croissantes et entières d'une variable quelconque. Dans ce qui suit, je me bornerai à trouver les expressions de l'angle, de l'ordonnée, de la vitesse et du temps en fonction de l'abscisse.

Donc la quantité

$$\frac{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3\theta}}{\displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{\xi(\theta_0) - \xi(\theta)}{\operatorname{tang}\theta_0 - \operatorname{tang}\theta}$$

est une moyenne entre les valeurs différentes que

$$\frac{\dfrac{1}{\cos^3\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

acquiert entre les limites θ_0 et θ.

On a généralement, quand aucune des dérivées ne devient infinie,

$$F(x) = F(0) + F'(0)\frac{x}{1} + F''(0)\frac{x^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Si l'on pose

$$F(x) = \text{tang}\,\theta\,,$$

on a, en différentiant par rapport à x,

$$F'(x) = \frac{1}{\cos^2\theta}\,\frac{d\theta}{dx}\,;$$

et substituant à $\frac{d\theta}{dx}$ sa valeur tirée de l'équation [4], n° 2,

$$F'(x) = -\frac{g}{(u\cos\theta)^2}.$$

En différentiant une seconde fois, il vient

$$F''(x) = \frac{2g}{(u\cos\theta)^3}\,\frac{d(u\cos\theta)}{dx}.$$

Or, on a (équation [9], n° 2),

$$\frac{d(u\cos\theta)}{d\theta} = uf(u)\,;$$

qui, multiplié par la valeur de $\frac{d\theta}{dx}$, donne

$$\frac{d(u\cos\theta)}{dx} = -\frac{gf(u)}{u}$$

Donc en substituant, il vient

$$F''(x) = -\frac{2g^2}{(u\cos\theta)^3}\frac{f(u)}{u}.$$

En différentiant encore, on trouve

$$F'''(x) = \frac{6g^2}{(u\cos\theta)^4}\frac{f(u)}{u}\frac{d(u\cos\theta)}{dx} - \frac{2g^2}{(u\cos\theta)^3}\left[\frac{f(u)}{u}\right]'\frac{du}{dx},$$

qui se réduit à

$$F'''(x) = -\frac{6g^3}{(u\cos\theta)^4}\left[\frac{f(u)}{u}\right]^2$$

$$+\frac{2g^3\sin\theta}{(u\cos\theta)^4}\left[\frac{f(u)}{u}\right]' + \frac{2g^3}{(u\cos\theta)^4}f(u)\left[\frac{f(u)}{u}\right]',$$

si l'on remarque que

$$\frac{du}{dx} = -\frac{g\sin\theta}{u\cos\theta} - \frac{gf(u)}{u\cos\theta}.$$

En opérant ainsi de suite, on pourra obtenir la quatrième dérivée, la cinquième, etc.

En posant $x=0$, et désignant par u_0 et θ_0 la vitesse et l'angle à l'origine, on obtient

$$F(0) = \operatorname{tang}\theta_0,$$

$$F'(0) = -\frac{g}{(u_0\cos\theta_0)^2},$$

$$F''(0) = -\frac{2g^2}{(u_0 \cos\theta_0)^3}\,\frac{f(u_0)}{u_0},$$

$$F'''(0) = -\frac{6g^3}{(u_0\cos\theta_0)^4}\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]^2$$

$$+\frac{2g^3\sin\theta_0}{(u_0\cos\theta_0)^4}\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]' + \frac{2g^3 f(u_0)}{(u_0\cos\theta_0)^4}\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]',$$

etc., etc.,

et par suite

$$\text{tang}\,\theta = \text{tang}\,\theta_0 - g\,\frac{x}{(u_0\cos\theta_0)^2} - g^2\frac{f(u_0)}{u_0}\,\frac{x^2}{(u_0\cos\theta_0)^3}$$

$$-g^3\left\{\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{f(u)_0}{u_0}\right]'\left(f(u_0)+\sin\theta_0\right)\right\}\frac{x^3}{(u_0\cos\theta_0)^4} + \text{etc.}$$

En substituant à *tang* θ sa valeur $\frac{dy}{dx}$, et intégrant de manière qu'on ait, pour $x=0$, $y=0$, il vient

$$y = x\,\text{tang}\,\theta_0 - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{u_0\cos\theta_0}\right)^2 - \frac{g^2}{3}\frac{f(u_0)}{u_0}\left(\frac{x}{u_0\cos\theta_0}\right)^3$$

$$-\frac{g^3}{4}\left\{\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]'\left(f(u_0)+\sin\theta_0\right)\right\}\left(\frac{x}{u_0\cos\theta_0}\right)^4 + \text{etc.}$$

D'une manière analogue, on trouve, pour exprimer la vitesse et le temps, les deux séries

$$u\cos\theta = u_0\cos\theta_0 - g\frac{f(u_0)}{u_0}\,x$$

$$+\frac{g^2}{2}\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]'\left(f(u_0)+\sin\theta_0\right)\frac{x^2}{u_0\cos\theta_0} + \text{etc.},$$

$$t = \frac{x}{u_0 \cos\theta_0} + \frac{g}{2}\frac{f(u_0)}{u_0}\left(\frac{x}{u_0\cos\theta_0}\right)^2$$

$$+ \frac{g^2}{3}\left\{\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{f(u_0)}{u_0}\right]'\left(f(u_0)+\sin\theta_0\right)\right\}\left(\frac{x}{u_0\cos\theta_0}\right)^3 + \text{etc.}$$

Ces séries ne sont convergentes que pour des valeurs de x assez petites. Dans le tir sous de grands angles, elles peuvent servir à calculer la trajectoire par points. A cet effet, on prendra une abscisse x assez petite pour n'avoir besoin que des premiers termes des séries; et, u_0 et θ_0 étant donnés, on calculera l'angle θ, l'ordonnée y, la vitesse u et le temps t, qui répondent à l'extrémité de l'abscisse x. Puis on prendra une seconde abscisse, et l'on calculera les mêmes quantités, en employant l'angle et la vitesse déjà trouvés. On déterminera ainsi un second point de la trajectoire. En continuant de la sorte, on trouvera un troisième point, un quatrième, etc.

Lorsque l'angle de départ est très-petit, les séries précédentes peuvent servir à calculer la trajectoire entière d'un seul coup. Dans ce cas, on pourra avoir la portée au moyen de la série suivante, qu'on obtient en égalant à zéro la valeur de y et déduisant la valeur de x au moyen du *retour des séries*. On trouve de la sorte

$$x = \frac{u_0^2}{g}\sin 2\theta_0 \left\{ 1 - \frac{4}{3}f(u_0)\sin\theta_0 + \frac{8}{9}f(u_0)\left[f(u_0) + \frac{3}{4}u_0 f'(u_0)\right]\sin^2\theta_0 + \text{etc.} \right\}.$$

Il est bon de remarquer que

$$\frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0$$

exprime la portée dans le vide.

CHAPITRE VI.

APPLICATIONS AU TIR DES PROJECTILES DE L'ARTILLERIE.

25. Les formules que nous venons d'exposer dans les chapitres précédents peuvent recevoir une application dans le tir des projectiles de l'artillerie.

Avant tout, pour pouvoir traduire les formules en nombres, il est nécessaire de connaître la nature de la fonction qui exprime la résistance.

Malgré les travaux et les expériences nombreuses exécutés dans le but de découvrir les lois de la résistance dans les milieux, les connaissances que nous avons sur cette matière, laissent beaucoup à désirer.

On admet généralement qu'un projectile qui se meut dans un milieu éprouve deux sortes de résistances.

La première consiste dans l'effort nécessaire pour séparer les diverses parties du milieu, se frayer un passage et vaincre le frottement. Cette résistance dépend de la cohésion du milieu et est communément considérée comme indépendante de la vitesse.

La seconde provient du mouvement imprimé aux molécules du milieu, c'est-à-dire de l'inertie. Cette seconde résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

Suivant la nature du milieu, l'une ou l'autre de ces résistances est prédominante. Dans les milieux très-consistants la résistance totale dépend essentiellement des forces de cohésion; tandis que, dans les fluides aériformes, la résistance due à de telles forces est presque insensible, du moins pour les vitesses qui ne sont point très-faibles.

Quand il s'agit de milieux gazeux, comme l'air atmosphérique, qui sont très-compressibles, la densité est plus considérable sur l'avant du projectile en mouvement, et plus faible sur l'arrière, que celle qui correspond à l'état d'équilibre du fluide. Pour tenir compte de ce phénomène, on introduit, dans l'expression de la résistance, un terme qui, suivant Euler (*), serait proportionnel à la quatrième puissance de la vitesse, et, suivant Piobert et Duchemin (**), au cube de la vitesse.

Euler oppose à l'introduction des puissances impaires de la vitesse, dans l'expression de la résistance, l'inconvénient qu'elles ont de faire changer de valeur la résistance, quand la vitesse change de signe.

En examinant les trois résultats d'expériences que M. Didion mentionne dans son *Traité de balistique*, pag. 45, et dont il se sert pour déterminer les coefficients de l'expression de la résistance, je trouve qu'ils sont mieux représentés par une fonction contenant les deux puissances paires, seconde et quatrième, que par une fonction qui renferme le carré et le cube.

(*) *Nouveaux principes d'artillerie de Benjamin* ROBINS, *commentés par Léonard* EULER, *traduits de l'allemand par* LOMBARD (1783), pag. 365 et suiv.

(**) PONCELET, *Introduction à la mécanique industrielle* (1839), pag. 619 et suiv.

Pour les petites vitesses, comme celles du pendule, il est nécessaire d'introduire en outre, dans l'expression de la résistance de l'air, un terme proportionnel à la vitesse; et, dans ce cas, il convient de représenter la résistance par deux termes, l'un proportionnel à la vitesse, et l'autre au carré de la vitesse, comme le démontrent les expériences récentes de M. Giulio (*). Mais pour les projectiles de l'artillerie, animés de très-grandes vitesses, le terme proportionnel à la simple vitesse est tout à fait négligeable.

Il est en outre naturel d'admettre, et l'expérience l'a confirmé dans certaines limites, que la résistance est en raison de l'aire de la projection du mobile sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement.

Il résulte de tout ceci que, entre les limites des vitesses usitées en artillerie, on peut représenter la résistance des milieux par la formule

$$R = A(\alpha + \beta u^2 + \gamma u^4),$$

dans laquelle

R, est la résistance en kilogrammes;

A, l'aire en mètres carrés de la projection du projectile sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement;

u, la vitesse en mètres;

α, β, γ, trois coefficients dépendants de la nature du milieu et de la forme du projectile.

Il existe une grande incertitude sur la valeur à attribuer à ces coefficients, suivant les divers milieux et suivant la forme du projectile. D'après les expériences les plus

---

(*) *Ch. Ign.* GIULIO, *Recherches expérimentales sur la résistance de l'air au mouvement des pendules.* Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin, 2me série, Tom. XIII, 1853.

récentes exécutées en France, on aurait les valeurs suivantes, pour un corps sphérique qui se meut dans différents milieux :

Valeurs des coefficients de la résistance dans divers milieux.

$$R = A\,(\alpha + \beta u^2 + \gamma u^4),$$

NOM DES MILIEUX.	α	β	γ	OBSERVATIONS.
Roches de calcaire oolithiques	12 000 000	180	0	DIDION. *Traité de balistique.* Paris, 1848, p. 240 et suiv.
Maçonnerie	5 520 000	82, 8	0	
Bois de chêne	2 085 000	41, 7	0	
Bois de sapin	1 160 000	23, 2	0	
Sable mêlé de gravier	435 000	87	0	
Terre argileuse	345 000	27, 6	0	
Eau.	0	23, 06	0	PONCELET, *Introd. à la méc. industr.* Metz, 1839, p. 616.
Air	0	0, 038 74	0, 000 000 08	Valeurs déduites des trois résultats d'expérience consignés à la page 45 du *Traité* de M. DIDION.

Dans les milieux solides, le terme indépendant de la vitesse l'emporte sur les autres; et pour de faibles vitesses, on peut, en comparaison de ce terme, considérer comme nul celui qui est proportionnel au carré de la vitesse.

Dans les milieux liquides, au contraire, c'est le second terme qui a le plus d'influence, et les autres sont alors négligeables. Il est bien entendu toujours qu'il ne s'agit pas de très-faibles vitesses, parce qu'alors il serait nécessaire d'introduire un terme constant.

Dans les milieux gazeux, quand les vitesses sont faibles, on peut négliger le terme proportionnel à la quatrième puissance. Mais pour les vitesses un peu plus fortes, il convient d'en tenir compte. Pour une vitesse de 696^{m}, les deux termes sont égaux; et le second est respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, du premier, pour les vitesses de 492^{m}, 220^{m}, 69^{m}, 22^{m}.

La vitesse des bombes dans le tir ordinaire des mortiers dépasse rarement 100^{m}; il en est de même des vitesses des boulets et des obus dans le tir courbe des canons et des obusiers; aussi, dans ces sortes de tirs, s'il n'est pas nécessaire d'avoir une grande exactitude, peut-on supposer la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse.

S'il s'agissait de vitesses faibles dans l'air, il faudrait ajouter un terme proportionnel à la simple vitesse; et pour de très-petites vitesses, ajouter en outre un terme constant. Mais pour les vitesses ordinaires de l'artillerie, il n'est point nécessaire de se préoccuper de ces deux termes.

Les coefficients ci-dessus, pour l'air, sont relatifs à une densité de ce fluide, telle qu'un mètre cube pèse 1^{k},2083, densité qui correspond à la température de 15° centigrades, à une pression barométrique de 0^{m},75, et à un état hygrométrique de $\frac{1}{2}$, correspondant à 72° de l'hygromètre

de Saussure. Pour une densité différente, le poids du mètre cube d'air étant δ, attendu que la résistance de l'air est proportionnelle à sa densité, on aura

$$R = \frac{\delta}{1,2083} A u^2 (0,03874 + 0,000\,000\,08\, u^2).$$

En représentant par h la hauteur due à la vitesse u, on peut écrire

$$R = A\delta (0,62874\, h + 0,000\,025\,46\, h^2),$$

(g étant égal à $9^m,805\,17$).

Donc, la résistance qu'un boulet sphérique éprouve dans l'air est égale au poids d'un cylindre d'air de même diamètre, ayant pour hauteur

$$0,62874\, h + 0,000\,025\,46\, h^2.$$

M. Giulio a trouvé, au moyen des oscillations décroissantes du pendule, que la résistance éprouvée par la boule du pendule est équivalente au poids d'un cylindre d'air ayant pour base le grand cercle de cette boule et pour hauteur la 112^{me} partie de la vitesse, plus les $\frac{2}{3}$ de la hauteur due à cette vitesse.

Le coefficient $\frac{2}{3}$ de la première puissance de la hauteur qu'il a trouvé, ne diffère que de $\frac{1}{17}$ environ du coefficient mentionné plus haut (*).

(*) Voici les hauteurs de la colonne d'air dont le poids est égal à la résistance, d'après les auteurs suivants :

Pour passer de la valeur de la résistance en kilogrammes à la valeur de l'accélération en mètres, il faut diviser R par la masse du projectile. Pour un projectile sphérique, A étant l'aire du grand cercle et D le diamètre, le volume est $\frac{2}{3}AD$ et la masse $\frac{2}{3}\frac{AD\Delta}{g}$; Δ étant le poids d'un mètre cube de la matière dont il est composé, et g la pesanteur. Je néglige le poids de l'air déplacé par le projectile et celui du volume d'air qui le suit dans son mouvement (n° 2), parce que chacun de ces deux poids n'est qu'une fraction excessivement petite du poids du projectile.

On a donc

$$r=\frac{3}{2}\frac{gR}{AD\Delta}=\frac{3}{2}\frac{g\delta}{D\Delta}\cdot\frac{0,03874}{1,2083}u^2\left(1+\frac{0,000\,000\,08}{0,038\,74}u^2\right).$$

Si l'on pose

$$k=\frac{1}{3}D\frac{\Delta}{\delta}\cdot\frac{1}{g}\cdot\frac{1,2083}{0,038\,74}=1,06\,D\frac{\Delta}{\delta},$$

$$c=\sqrt{\frac{0,038\,74}{0,000\,000\,08}}=696,$$

on obtiendra

$$r=\frac{u^2}{2k}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right).$$

NEWTON. TEMPELHOFF. . . . . $0,5\,h$;
BORDA. LOMBARD. . . . . $0,6\,h$;
EULER . . . . . $0,5\,h\,(1+0,00011\,h)$;
DUCHEMIN . . . . . $0,512\,h\,(1+0,0024\,u)$;
DIDION. Pour les boulets . . . . . $0,438\,h\,(1+0,0023\,u)$;
» Pour les bombes . . . . . $0,529\,h\,(1+0,0012\,u)$;

De sorte qu'on aura pour la fonction qui exprime la résistance de l'air qu'éprouve un projectile sphérique

$$f(u)=\frac{u^2}{2gk}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right) \qquad \begin{cases} k=1,06\,D\,\dfrac{\Delta}{\delta}, \\ c=696^{m}. \end{cases}$$

On n'a pas encore d'expériences précises sur la résistance qu'éprouvent les projectiles oblongs, introduits dans ces derniers temps, et dont l'usage s'étend chaque jour davantage. Elle est sans doute moindre que celle des projectiles sphériques, et cela, d'autant plus que l'acuité de la partie antérieure est plus prononcée. Afin de faire concorder les expériences déjà connues sur le tir de ces projectiles avec les formules balistiques, il faut réduire les valeurs données ci-dessus des coefficients β et γ.

26. Après avoir fixé l'expression de la résistance des milieux aux projectiles de l'artillerie, passons à l'application des formules que nous avons établies.

Les principaux problèmes de balistique, qui se présentent dans la pratique de l'artillerie, sont les suivants :

1° Déterminer la pénétration des projectiles dans les milieux résistants dont se composent les diverses espèces de remparts militaires, tels que terres, maçonneries, bois, etc.

2° Déterminer le mouvement des projectiles qui sont lancés dans l'air avec de grandes vitesses et sous de petits angles de départ. C'est le problème du *tir de plein-fouet*.

3° Déterminer le mouvement des projectiles qui sont lancés dans l'air avec de faibles vitesses et sous de grands

angles. Ce problème se rapporte au *tir courbe* et au *tir à ricoche*.

1°. PROBLÈME.

Pénétration des projectiles dans des milieux solides.

27. D'après ce qui précède, la résistance qu'un projectile éprouve à se mouvoir dans un milieu solide est représentée par

$$R = A(\alpha + \beta u^2),$$

A étant l'aire du plus grand cercle; α et β, deux coefficients dépendant de la nature du milieu, qu'il faut déterminer par voie expérimentale; u la vitesse variable pendant la pénétration.

Soient D le diamètre du projectile, Δ la densité, on aura pour l'accélération due à la force R

$$r = \frac{3g}{2D\Delta}(\alpha + \beta u^2).$$

Cela posé, les formules du n° 16, qui, pour $n = 2$, se réduisent à

$$2gbs = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)^2 z^{2a-3}\,dz}{\int_z^Z (1+z^2)^2 z^{2a-3}\,dz},$$

$$gbx = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)\, z^{2a-2}\, dz}{\int_z^Z (1+z^2)^2\, z^{2a-3}\, dz},$$

$$2gby = \int_{z_0}^{z} \frac{(1-z^4)\, z^{2a-3}\, dz}{\int_z^Z (1+z^2)^2\, z^{2a-3}\, dz},$$

$$gt\sqrt{2b} = \int_z^{z_0} \frac{(1+z^2)\, z^{a-2}\, dz}{\sqrt{\int_z^Z (1+z^2)^2\, z^{2a-3}\, dz}},$$

$$4gb\rho = \frac{(1+z^2)^2\, z^{2a-3}}{\int_z^Z (1+z^2)^2\, z^{2a-3}\, dz},$$

renferment la solution de tous les problèmes relatifs à la pénétration des projectiles, en y faisant

$$a = \frac{3\alpha}{2D\Delta}, \qquad b = \frac{3\beta}{2D\Delta}.$$

Mais la quantité dont on a le plus besoin en pratique, c'est la pénétration totale du projectile. On a trouvé plus haut (n° 19)

$$e^{2gbs} = 1 + \frac{b}{2}\left(\frac{v_0 \cos\theta^0}{z_0^a}\right)^2 \int_z^{z_0} (1+z^2)^2\, z^{2a-3}\, dz,$$

pour la longueur de l'arc compris entre les deux inclinaisons z, z_0. Si l'on suppose que le projectile soit lancé horizontalement, on a $\theta_0 = 0$, et par suite $z_0 = 1$. Pour avoir la pénétration totale, mesurée sur la courbe, il faut étendre l'intégration jusqu'à $\theta = -\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire jusqu'à $z = 0$. On a donc, en désignant par S la pénétration totale, si $a > 1$,

$$e^{2gbS} = 1 + \left(\frac{2a^2-1}{2a^2-2}\right)\frac{b}{a}u_0^2,$$

d'où l'on tire

$$S = \frac{1}{2gb}\log\left\{1 + \left(\frac{2a^2-1}{2a^2-2}\right)\frac{b}{a}u_0^2\right\}.$$

Lorsque a est très-grand, ce qui arrive pour les matériaux ordinaires, on a sensiblement

$$S = \frac{1}{2gb}\log\left(1 + \frac{b}{a}u_0^2\right).$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs, on trouve

$$S = \frac{D\Delta}{3g\beta}\log\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}u_0^2\right).$$

On arriverait au même résultat, en négligeant la force de la pesanteur en comparaison de la force de résistance du milieu.

A l'inspection de la formule ci-dessus, on reconnaît que, si on lance contre le même obstacle différents boulets animés de la même vitesse, les pénétrations sont proportionnelles au produit du calibre par la densité du projectile.

Quand $\frac{\alpha}{\beta} > u_0^2$, on peut développer le logarithme en série, et on obtient

$$S = \frac{D\Delta}{3g\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}u_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^2}u_0^4 + \text{etc.}\right).$$

Pour les valeurs de u_0, faibles en comparaison de $\frac{\alpha}{\beta}$, cette série est très-convergente; et alors on a, avec une exactitude suffisante, en ne prenant que le premier terme,

$$S = \frac{D\Delta}{3g\alpha}u_0^2 = \frac{2}{3}\frac{D\Delta}{\alpha}h_0.$$

Ce qui revient à supposer la résistance du milieu constante.

2°. PROBLÈME.

Tir de plein-fouet.

28. Comme le tir de plein-fouet s'exécute toujours avec de petits angles de projection, on peut lui appliquer la seconde méthode d'approximation développée au n° 23, suivant laquelle on substitue à la trajectoire réelle, celle qui est décrite dans un milieu dont la résistance a pour expression

$$\frac{f(\alpha u \cos\theta)}{\alpha \cos\theta}.$$

Lorsqu'on prend

$$f(u) = au^2 + bu^4,$$

l'hypothèse que l'on fait revient à supposer que les coefficients a et b, au lieu d'être constants, sont, le premier proportionnel à $\cos\theta$ et le second à $\cos^3\theta$. Lorsque l'angle θ varie entre les limites que comporte le tir de plein-fouet, a et b varient assez peu. Par exemple, en faisant varier θ de $+5°$ à $-5°$, le coefficient a varie entre 1 et 0,996, et le coefficient b entre 1 et 0,989.

Au sommet où $\theta = 0$, les valeurs des coefficients variables coïncident avec leurs véritables valeurs, si l'on prend $\alpha = 1$; et pour tous les autres points elles sont plus faibles. Cette hypothèse donne donc une résistance un peu trop faible dont l'effet sera d'augmenter la valeur de toutes les ordonnées, et de donner ainsi une courbe située tout entière au-dessus de la trajectoire réelle.

On peut aisément obtenir une courbe située au-dessous de la trajectoire réelle, en posant

$$\alpha = \frac{1}{\cos\theta_0}.$$

Alors les coefficients variables

$$a\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}, \qquad b\left(\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}\right)^3$$

coïncident avec les véritables à l'origine et au point où l'inclinaison de la courbe est égale à $-\theta_0$; sont plus

grands pour toutes les valeurs de θ comprises entre $+\theta_0$ et $-\theta_0$; atteignent une valeur maximum au sommet; et sont trop faibles pour les valeurs de θ moindre que $-\theta_0$. Dans ce cas, la courbe obtenue est au-dessous de la trajectoire; mais étant prolongée au delà du point où l'inclinaison est la même qu'à l'origine, elle doit s'en rapprocher et finir par la couper.

En choisissant donc convenablement la valeur de la constante α, on peut à volonté obtenir une courbe située au-dessus ou au-dessous de la trajectoire réelle.

Si l'on introduit dans les formules du n° 23 la loi de résistance exprimée par

$$f(u) = \frac{u^2}{2gk}\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right),$$

on trouve

$$\frac{\alpha x}{2k} = -\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)};$$

et en effectuant l'intégration, il vient

$$\frac{\alpha x}{k} = \log \frac{v_0^2(v^2+c^2)}{v^2(v_0^2+c^2)};$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{v^2} = \left(\frac{1}{v_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)e^{\frac{\alpha x}{k}} - \frac{1}{c^2} = F(x).$$

Il suit de là que

$$y = x \operatorname{tang} \theta_0$$

$$- g\left[k^2\left(\frac{1}{v_0^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{k}} - \frac{\alpha x}{k} - 1\right) - \frac{\alpha^2 x^2}{2c^2}\right],$$

ou, en ayant égard à ce que $v = \alpha u \cos\theta$,

$$y = x \operatorname{tang} \theta_0$$

$$- g\left[k^2\left(\frac{1}{\alpha^2 u_0^2 \cos^2\theta_0} + \frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{\alpha x}{k}} - \frac{\alpha x}{k} - 1\right) - \frac{\alpha^2 x^2}{2c^2}\right].$$

Si l'on pose $\alpha = 1$, on aura pour l'équation de la trajectoire

$$y = x \operatorname{tang} \theta_0$$

$$- g\left[k^2\left(\frac{1}{u_0^2 \cos^2\theta_0} + \frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{x}{k}} - \frac{x}{k} - 1\right) - \frac{x^2}{2c^2}\right];$$

et si l'on fait $\alpha = \frac{1}{\cos\theta_0}$, on aura

$$y = x \operatorname{tang} \theta_0$$

$$- g\left[k^2\left(\frac{1}{u_0^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{x}{k\cos\theta_0}} - \frac{x}{k\cos\theta_0} - 1\right) - \frac{x^2}{2c^2\cos^2\theta_0}\right].$$

La dernière équation fournit une courbe inférieure à la trajectoire réelle, et celle qui la précède, une courbe supérieure.

Le temps est donné par l'équation

$$t = -2k\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)},$$

d'où l'on tire

$$\frac{c}{2k}t = \frac{c}{au\cos\theta} - \frac{c}{au_0\cos\theta_0}$$

$$+ \text{arc tang}\frac{au\cos\theta}{c} - \text{arc tang}\frac{au_0\cos\theta_0}{c}.$$

Lorsque l'angle de projection est très-faible (c'est le cas le plus ordinaire dans le tir de plein-fouet), on peut faire, pour plus de simplicité, $\cos\theta_0 = 1$; et alors on a, pour résoudre toutes les questions du tir, les équations

$$\begin{cases} y = x\,\text{tang}\,\theta_0 - g\left[k^2\left(\frac{1}{u_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(e^{\frac{x}{k}}-\frac{x}{k}-1\right)-\frac{x^2}{2c^2}\right], \\ \frac{1}{u^2} = \left(\frac{1}{u_0^2}+\frac{1}{c^2}\right)e^{\frac{x}{k}} - \frac{1}{c^2}, \\ \frac{c}{2k}t = \frac{c}{u} - \frac{c}{u_0} + \text{arc tang}\frac{u}{c} - \text{arc tang}\frac{u_0}{c}. \end{cases}$$

Si l'on pose $c = \infty$, on retombe sur les équations connues du tir de plein-fouet, dans l'hypothèse ordinaire de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse :

$$\begin{cases} y = x \operatorname{tang} \theta_0 - \dfrac{g k^2}{u_0^2}\left(e^{\frac{x}{k}} - \dfrac{x}{k} - 1\right), \\ u = u_0 e^{-\frac{x}{2k}}, \\ t = 2k\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u_0}\right) = \dfrac{2k}{u_0}\left(e^{\frac{x}{2k}} - 1\right). \end{cases}$$

Si l'on pose $k = \infty$, et le coefficient de la quatrième puissance de la vitesse $\frac{1}{2kc^2} = K$, l'équation de la trajectoire devient

$$y = x \operatorname{tang} \theta_0 - g\left(\frac{x^2}{2u_0^2} + \frac{Kx^3}{3}\right).$$

Cette équation suppose la résistance de l'air proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse, et à la troisième puissance du cosinus de l'angle formé par la tangente avec l'horizon.

L'*Aide-Mémoire d'artillerie navale par* Lafay (Paris, 1850) propose, page 531, une formule égale à celle-ci, et dit qu'elle est suffisamment légitimée tant par les expériences faites à Gâvres pendant les 18 dernières années, que par les expériences de Metz, mentionnées dans le Traité de M. Didion, page 294.

A ce sujet, nous ferons observer qu'il convient de n'accepter, qu'avec une grande circonspection, une telle manière de justifier les formules à l'aide des résultats du tir. En effet, étant donnée une équation de la trajectoire, si,

au moyen des résultats du tir, on détermine les paramètres qu'elle renferme, et si l'on fait servir les valeurs ainsi trouvées à calculer d'autres tirs, il peut arriver que, par suite d'une compensation d'erreurs, la pratique s'accorde avec la théorie, sans que pour cela l'équation adoptée représente exactement la trajectoire réelle.

Nous avons un exemple frappant de cette compensation d'erreurs dans la théorie parabolique des projectiles dans le vide, qui fut pendant plus d'un siècle, depuis Galilée jusqu'à Robins, considérée comme applicable au mouvement des projectiles dans l'air. Blondel et Bélidor essayèrent même de réfuter les objections faites contre l'hypothèse du mouvement parabolique dans un milieu résistant; et Bélidor prétendit avoir fait des expériences qui réduisent ces objections à néant (*). Une pareille illusion provenait de ce que la vitesse initiale n'étant pas connue, on la déduisait de la portée; il en résultait nécessairement une vitesse plus faible que la vitesse réelle, qui étant introduite dans l'équation de la parabole fournissait une courbe inférieure à la trajectoire réelle, depuis le point de départ jusqu'au point de chute, mais qui n'en différait pas notablement.

Pour que l'accord des portées obtenues en pratique avec celles qui sont déduites des formules prouve la justesse de

---

(*) Cette illusion, touchant le peu d'influence de la résistance de l'air, était si générale à la fin du XVII^e^ siècle et au commencement du suivant que, dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences de Paris*, on lit, après l'énumération des travaux de différents mathématiciens sur la théorie du mouvement parabolique, les paroles suivantes: « Il ne paraît pas que l'on ait présentement rien à désirer sur la pratique « de cet art (*celui de lancer des bombes*). Peut-être seulement pourroit-on encore « perfectionner l'instrument qui sert à pointer la pièce ou le mortier..... Mais la « géométrie étant quitte, pour ainsi dire, envers la pratique, est en droit de pousser « plus loin la spéculation, et de donner quelque chose à la simple curiosité, quand « l'utilité est satisfaite. »

Hist. de l'Acad. R. des Sciences. A. 1707, p. 123.

celles-ci, il faut que la vitesse initiale et les autres paramètres, qu'elles renferment, soient déterminés sans leur secours.

Lorsque l'angle de projection est tellement petit qu'on puisse négliger le terme en $\sin^2\theta_0$ et les suivants, dans la série relative à l'amplitude du tir (n° 23), on pourra calculer celle-ci par la formule très-simple

$$x = \frac{u_0^2}{g} \sin 2\theta_0 \left\{1 - \frac{4}{3} f(u_0) \sin \theta_0\right\}.$$

3°. PROBLÈME.

Tir courbe.

29. Les formules, qu'on vient d'exposer, peuvent encore servir à calculer le tir à ricochet, quand on n'a pas besoin d'une grande exactitude; mais elles cessent d'être applicables au tir courbe, parce qu'alors l'angle tangentiel varie entre des limites trop éloignées, dans l'étendue de la trajectoire.

Pour ce genre de tir, il vaut mieux se servir de la première méthode d'approximation (n° 21): calculer par points différentes trajectoires et en former des tables analogues à celles qu'on a calculées dans l'hypothèse d'une résistance en raison du carré de la vitesse.

Mais avant d'entreprendre un pareil travail, qui exigerait du temps et de la fatigue, il serait nécessaire d'avoir des connaissances moins vagues et plus certaines sur la résistance de l'air, et, à défaut d'une théorie mathématique permettant de l'exprimer avec les signes usuels de l'analyse,

d'avoir au moins une série de résultats précis et sûrs, dont on puisse déduire une table numérique ou une courbe faisant connaître la résistance correspondante à chaque vitesse, et réciproquement.

Les expériences importantes exécutées à Metz ont beaucoup augmenté nos connaissances sur ce sujet; néanmoins, il reste encore beaucoup d'incertitudes à faire disparaître.

Les appareils électro-magnétiques, qui servent à mesurer la vitesse des projectiles, lorsqu'ils auront atteint toute la perfection nécessaire, me paraissent convenir plus particulièrement à ce genre de recherches. Ils peuvent fournir les vitesses aux différents points d'une même trajectoire, tandis que le pendule balistique ne détermine la vitesse à différentes distances qu'au moyen de diverses trajectoires. Or, on sait que quelque soin que l'on prenne pour opérer dans des circonstances identiques, les vitesses initiales varient assez d'un coup à l'autre: ce qui tend à diminuer l'exactitude des résultats ainsi obtenus.

Au moyen de plusieurs cibles recticulées assez rapprochées, et avec le secours de l'appareil de M. Navez, ou d'autres du même genre, il ne semble pas difficile de déterminer la vitesse sur différents éléments de la trajectoire dont les inclinaisons sont connues. Alors par la formule (n° 2)

$$\frac{d(u\cos\theta)}{u\,d\theta} = f(u)\,,$$

qui lie les décroissements de la vitesse horizontale à ceux de l'angle tangentiel, on pourrait déterminer la fonction inconnue $f(u)$.

Tant qu'on n'aura pas la table qui exprime la résistance

avec une exactitude dont on ne puisse douter, il est inutile de calculer par points les tables du tir élevé.

Toutefois les circonstances ordinaires du tir élevé sont telles qu'on peut, sans grave erreur, faire usage pour ce tir des tables calculées dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse. En effet, dans le tir des bombes, les vitesses ne varient qu'entre 50^m et 150^m, et entre ces limites, comme nous l'avons déjà remarqué, la résistance ne s'éloignant guère de la deuxième puissance de la vitesse, on peut supposer $\frac{f(u)}{u^2}$ constant, dans l'étendue de la courbe, et égal à la valeur initiale, ou mieux à une moyenne entre les valeurs qu'il acquiert, et par suite calculer la trajectoire avec une précision suffisante, au moyen des tables publiées par divers auteurs, par exemple, de celle de M. Otto (*).

Remarquons que la quantité nommée k par ce dernier auteur, et qu'il prend pour unité de longueur, est telle que

$$2g\,k = \frac{u_0^2}{f(u_0)}.$$

On obtiendra une plus grande exactitude, si l'on prend pour déterminer k, au lieu de la valeur initiale $\frac{u_0^2}{f(u_0)}$, une valeur moyenne entre celle que prend cette fonction dans l'étendue de l'arc de courbe que l'on considère.

Si l'on n'avait sous la main aucune de ces tables et que cependant on eût à calculer une trajectoire élevée, on pourrait employer une des méthodes d'approximation

---

(*) Otto, *Tafeln für den Bombenwurf* (Berlin, 1842). Il existe une traduction de ces tables en français, par Rieffel, sous le titre : *Tables balistiques générales pour le tir élevé*. Paris, 1845.

imaginées par LEGENDRE (*) ou par FRANÇAIS (**), pour calculer les trajectoires élevées dans l'hypothèse de la résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

On divisera, par exemple, la trajectoire en deux branches, l'une ascendante de l'origine au sommet, l'autre descendante du sommet au point de chute.

En désignant par h' la hauteur due à la vitesse du mobile au sommet, on a

$$h' = \frac{h_0 \cos^2 \theta_0}{1 + 2\frac{h_0}{k}\cos^2\theta_0 \xi(\theta_0)},$$

où

$$\frac{h_0}{k} = f(u_0),$$

$$\xi(\theta) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right\}.$$

On déterminera les coordonnées x', y', du sommet, au moyen des deux équations

$$\frac{x'}{k'} = 1 - \cos\theta_0 + C \log\left(\frac{1-C}{\cos\theta_0 - C}\right),$$

$$\frac{y'}{k'} = \frac{1-C^2}{a}\frac{x'}{k'} - \frac{C}{2}\operatorname{tang}\theta_0 - \frac{1}{3a}(1 - \cos^3\theta_0),$$

(*) LEGENDRE, *Dissertation sur la question de balistique, proposée par l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Prusse pour le prix de 1782, qui lui a été adjugé dans l'assemblée publique du 6 juin.* Ce Mémoire a été réimprimé à Paris chez Corréard, 1846.

(**) L'ouvrage de FRANÇAIS est resté inédit. On en trouve un extrait dans le *Traité de Balistique*, par DIDION. Paris, 1848.

de l'art. 51 de la Dissertation de LEGENDRE, et où

$$\alpha = \sin\theta_0 \cos\theta_0 ,$$

$$C = \cos\theta_0 - \frac{k' \operatorname{tang}\theta_0}{4k_0} ,$$

$$2g k' = \frac{\left(\frac{u_0 + u'}{2}\right)^2}{f\left(\frac{u_0 + u'}{2}\right)} .$$

L'amplitude x'' de la branche descendante se déduira de l'équation

$$\frac{4k'}{3} y' = \frac{x''^2}{3 - \frac{x''}{k''}} ,$$

de l'art. 66 de la Dissertation déjà citée, et où l'on peut prendre

$$k'' = \frac{k'}{f(u')} .$$

L'amplitude totale sera égale à $x' + x''$.

NOTE

Application des formules précédentes à un cas particulier.

Je prendrai pour exemple la courbe décrite par une bombe de $0^m,22$, lancée avec une vitesse de 120^m, sous

l'angle de 45°, dans un milieu de densité constante et dont la résistance est exprimée par

$$f(u) = \frac{u^2}{2gc}\left(1 + \frac{u}{r}\right),$$

où

$$c = 992^m, \qquad \frac{1}{r} = 0,0012, \qquad g = 9^m,809. \quad (*)$$

A l'aide des formules (n° 21)

$$\frac{1}{k_1 \cos^2\theta_1} = \frac{1}{k_0 \cos^2\theta_0} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{u_0}{r}\right)\left[\Xi(\theta_0) - \Xi(\theta_1)\right],$$

$$\frac{1}{k_2 \cos^2\theta_2} = \frac{1}{k_1 \cos^2\theta_1} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{u_1}{r}\right)\left[\Xi(\theta_1) - \Xi(\theta_2)\right],$$

etc., etc., etc.,

où

$$\Xi(\theta) = \int \frac{d\theta}{\cos^3\theta}, \quad (**)$$

on calculera une série de valeurs de k correspondante à une série de valeurs de θ, qu'il convient de prendre en progression arithmétique.

(*) Ces valeurs des constantes sont tirées du *Traité de Balistique*, par DIDION, tab. VI.

(**) Les valeurs de $\Xi(\theta)$ se trouvent dans beaucoup d'écrits de balistique, par exemple, dans celui de DIDION, tab. V.

En faisant varier d'abord θ de degré en degré, depuis $\theta = 45°$, jusqu'à $\theta = 39°$, on obtiendra les valeurs suivantes :

θ	h	$h \operatorname{tang} \theta$
45°	734m, 0	734m, 0
44	681 , 5	658 , 1
43	635 , 8	592 , 9
42	595 , 6	536 , 3
41	560 , 0	486 , 8
40	528 , 4	443 , 4
39	500 , 1	405 , 0

Les valeurs de x et de y, correspondantes au point où $\theta = 39°$, sont données par les deux intégrales

$$x = 2\int_{\theta=39°}^{\theta=45°} h\,d\theta,$$

$$y = 2\int_{\theta=39°}^{\theta=45°} h \operatorname{tang}\theta\,d\theta;$$

lesquelles, en leur appliquant la méthode des quadratures de Simpson, fournissent

$$x = 126^{m}, 2,$$

$$y = 114\ , 6.$$

On peut maintenant partir de $\theta = 39°$ et faire varier les angles θ de deux degrés. Il viendra

θ	h	$h \tang \theta$
39°	500m, 1	405m, 0
37	451 , 6	340 , 3
35	411 , 7	288 , 3

D'où l'on tire, pour les valeurs des coordonnées de $\theta = 39°$ à $\theta = 35°$.

$$x = 63^{m}, 3 ,$$

$$y = 47 , 8 .$$

En faisant ensuite varier les angles θ de $2° \frac{1}{2}$, on obtient

θ	h	$h \tang \theta$
35°	411m, 7	288m, 3
32, 5	371 , 0	236 , 3
30	338 , 0	195 , 1

d'où il suit.

$$x = 65^{m}, 0 ,$$

$$y = 41 , 6 ,$$

depuis $\theta = 35°$ jusqu'à $\theta = 30°$.

Si, à partir de 30°, on fait varier les angles θ de 5°, on formera la table suivante:

θ	h	$h \tang \theta$
30°	338m, 0	195m, 1
25	288 , 3	134 , 5
20	253 , 6	92 , 3
15	228 , 7	61 , 3
10	210 , 8	37 , 2
5	198 , 2	17 , 3
0	189 , 6	0

D'où l'on déduit, depuis $\theta = 30°$ jusqu'à $\theta = 0°$,

$$x = 251^{m}, 2 ,$$

$$y = 76 , 0 .$$

En additionnant toutes les valeurs trouvées pour x et y, on aura pour les coordonnées qui correspondent au sommet de la courbe,

$$x = 505^{m}, 7 ,$$

$$y = 280 , 0 .$$

En passant à la branche descendante, sur laquelle θ devient négative, et faisant varier l'angle de 5°, on forme la table suivante:

θ	h	h tang θ
0°	189m, 5	0m
— 5	184 , 4	16 , 1
— 10	182 , 2	32 , 1
— 15	182 , 9	49 , 0
— 20	186 , 3	67 , 8
— 25	192 , 7	89 , 9
— 30	202 , 3	116 , 8
— 35	215 , 8	151 , 1
— 40	233 , 8	196 , 2
— 45	257 , 6	257 , 6
— 50	288 , 6	343 , 9

d'où l'on tire

$$x = 361^{m}, 9 ,$$

$$y = - 199 , 2 ,$$

pour les valeurs de x et y, comprises entre le sommet et le point où $\theta = - 50°$.

En faisant ensuite varier l'angle θ de 3 degrés, il vient

θ	h	h tang θ
— 50°	288m, 6	343m, 9
— 53	311 , 5	413 , 3
— 56	338 , 2	501 , 4

d'où l'on déduit

$$x = 65^{m},4\,,$$

$$y = -87,2\,,$$

depuis $\theta = -50°$ jusqu'à $\theta = -56°$.

De manière que les valeurs de x et y, depuis le sommet, jusqu'au point où $\theta = -56°$, sont

$$x = 427^{m},3\,,$$

$$y = -286,4.$$

La hauteur de la branche ascendante, trouvée plus haut, étant inférieure à celle-ci de $6^{m},4$; pour avoir l'amplitude de la branche descendante, il faudra diminuer $427^{m},3$ de

$$6^{m},4\,.\,\cot 56° = 4^{m},3.$$

On aura par conséquent

Amplitude de la branche descendante	$423^{m},0$
Amplitude de la branche ascendante	505, 7
Amplitude totale .	$928^{m},7$
Hauteur du tir . .	280, 0

Puisque $65^{m},4$ correspondent à 6° de différence dans l'angle θ, on trouve que $4^{m},3$ correspondent à une différence de 24′ environ; de sorte que l'angle de chute doit être à peu près 55°, 36′.

Dans le calcul des valeurs de x et y par la formule des

quadratures de Simpson, on n'a pas tenu compte de la correction qu'il serait très-facile d'effectuer, au moyen des différences quatrièmes des valeurs successives de h et de $h\,tang\,\theta$; parce qu'elle n'a pas d'influence sur les chiffres décimaux qu'on a retenus dans les tableaux.

Degré d'approximation.

Pour que les résultats qu'on vient de trouver puissent servir à juger du degré comparatif de précision des autres méthodes d'approximation, il est nécessaire de fixer la limite de l'erreur commise. En désignant par ϵ l'erreur qu'on commet sur la valeur de $\frac{1}{h\cos^2\theta}$, on a (n° 21)

$$\epsilon < \left(\frac{B+AC}{2}\right)\left[\frac{(1+C\delta)^n-1}{C}\right]\delta\,,$$

dans laquelle δ est un nombre égal ou supérieur à chacun des éléments de la différence $X - x_0$; n est le nombre de ces éléments; A, B, C sont trois nombres égaux ou supérieurs aux plus grandes valeurs numériques que peuvent prendre les fonctions

$$\frac{2}{c}\left(1+\frac{u}{r}\right),$$

$$\frac{2u}{cr}\sin\theta\cos^2\theta\,,$$

$$\frac{u^3}{2gcr}\cos^2\theta\,,$$

entre les limites de l'intégration.

L'examen de ces fonctions nous fait voir que, dans la branche ascendante, leurs valeurs vont en diminuant à mesure qu'on s'approche du sommet; d'où il suit qu'on peut, dans cette branche, prendre pour A, B, C les valeurs de ces fonctions à la première limite de l'intégration.

Dans la branche descendante, la première fonction décroît du sommet jusqu'au point où la vitesse est un *minimum*, et de là elle croît jusqu'au point de chute. La seconde, au contraire croît du sommet jusqu'au point où elle devient un *maximum*, puis diminue jusqu'au point de chute. Le point correspondant au *maximum* se trouve au moyen de l'équation

$$2\cos\theta + f(u)\,\text{tang}\,2\theta = 0,$$

qui donne $\theta = 40°$ environ. Enfin la valeur de la troisième fonction décroît du sommet jusqu'au point de chute.

Dans la branche descendante, il convient donc de prendre pour A, depuis le sommet jusqu'au point où $\theta = -15°$ environ, la valeur qu'acquiert la première fonction à la première limite; ensuite de ce point jusqu'à celui de chute, prendre la valeur qu'elle reçoit à la seconde limite. Au contraire, on prendra pour B, du sommet jusqu'à 40°, la valeur que prend la seconde fonction à la seconde limite; et ensuite, celle qui est obtenue à la première limite. Quant à C, on prendra toujours la valeur qu'acquiert la troisième fonction à la première limite.

En appliquant ces règles au calcul des valeurs de A, B, C; et en désignant par η, ξ, υ les erreurs commises sur les valeurs de h, x, y, on arrive aux résultats consignés dans le tableau suivant:

	De 45° à 39°	39° à 35°	35° à 30°	30° à 0°
$A =$	0,002 31	0,002 26	0,002 23	0,00 221
$B =$	0,000 10	0,000 09	0,000 08	0,00 007
$C =$	0,053 28	0,036 19	0,030 03	0,024 97
$\delta =$	0,048 11	0,071 37	0,075 96	0,125 29
$\varkappa =$	6	2	2	6
$\epsilon >$	—0,000 001 5	—0,000 002 4	—0,000 003 3	—0,000 009 6
$\epsilon <$	0	0	0	0
$\eta <$	0,2	0,3	0,3	0,3
$\eta >$	0	0	0	0
$\xi <$	0,04	0,04	0,05	0,32
$\xi >$	0	0	0	0
$\upsilon <$	00,4	0,03	0,03	0,09
$\upsilon >$	0	0	0	0

	0° à — 15°	— 15° à — 30°	— 30° à — 40°	— 40° à — 50°	— 50° à — 56°
$A =$	0,002 16	0,002 17	0,002 18	0,002 20	0,002 21
$B =$	0,000 03	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06
$C =$	0,013 98	0,012 36	0,011 56	0,011 24	0,010 85
$\delta =$	0,093 88	0,125 29	0,175 32	0,284 57	0,268 20
$n =$	3	3	2	2	2
$>$	—0,000 010 4	—0,000 010 4	—0,000 010 4	—0,000 010 5	—0,000 010 6
$<$	0	0,000 002 1	0,000 004 9	0,000 011 4	0,000 017 3
$<$	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4
$>$	0	—0,06	—0,16	—0,4	—0,6
$<$	0,16	0,16	0,10	0,14	0,08
$>$	0	—0,03	—0,06	—0,14	—0,13
$<$	0,02	0,07	0,07	0,14	0,11
$>$	0	—0,01	—0,04	—0,14	—0,17

Chaque valeur de la limite de l'erreur ϵ se compose de deux parties : la première exprimée par

$$\left(\frac{B+AC}{2}\right)\left[\frac{(1+C\delta)^n-1}{C}\right]\delta,$$

est due à l'altération que subirait la dernière valeur de $\frac{1}{h\cos^2\theta}$, si au lieu de diviser l'intervalle de l'intégration en n parties, on la partageait en un nombre infini de parties ; la seconde s'obtient en multipliant l'erreur commise sur la première valeur de $\frac{1}{h\cos^2\theta}$ par

$$(1+C\delta)^n ;$$

et elle est due à l'altération produite sur la dernière valeur de $\frac{1}{h\cos^2\theta}$ par la variation de la première (*).

Il faut remarquer que, dans notre cas, la première partie de l'erreur est négative de 45° à — 15°, et qu'au delà elle reste toujours positive.

Pour calculer les limites des erreurs commises sur x et y, on a supposé que l'erreur faite sur h se maintenait la même dans toute l'étendue de l'arc qu'on considère ; c'est-à-dire, on a calculé la limite de l'erreur correspondante à x par la formule

$$2\eta\,(\theta_0-\theta),$$

et celle qui est relative à y par la formule

$$2\eta\log\frac{\cos\theta}{\cos\theta_0}.$$

(*) Voyez le Mémoire déjà cité de Coriolis, dans le *Journal de mathématiques* de Liouville, tome 2, année 1837.

Si x' et y' désignent l'amplitude et la hauteur de la branche ascendante; x'' et y'' l'amplitude et la hauteur de la branche descendante de 0° à $-56°$; ξ', υ', ξ'', υ'' les erreurs correspondantes; on aura

$$x' = 505,7 + \xi',$$

$$y' = 280,0 + \upsilon',$$

$$x'' = 427,3 + \xi'',$$

$$y'' = 286,4 + \upsilon'',$$

où, en vertu de la table précédente, on a

$$\xi' > 0 \qquad \text{et} \quad < 0,45,$$

$$\upsilon' > 0 \qquad \text{et} \quad < 0,19,$$

$$\xi'' > -0,36 \qquad \text{et} \quad < 0,64,$$

$$\upsilon'' > -0,36 \qquad \text{et} \quad < 0,41.$$

L'amplitude totale, ou portée G, sera

$$G = x' + x'' - (y'' - y') \cot 56°,$$

ou bien

$$G = 928,7 + \xi' + \xi'' - (\upsilon'' - \upsilon') \cot 56°.$$

Si dans cette expression, on met à la place de ξ', ξ'', υ' leurs limites supérieures, et au lieu de υ'' sa limite inférieure, on obtiendra une valeur supérieure à la véritable

portée. Au contraire, on aura une valeur plus faible, si l'on substitue à ξ', ξ'', v' leurs limites inférieures, et à v'' sa limite supérieure.

Il en résultera donc

$$G < 930^{m},3,$$

$$G > 927\ ,9.$$

En prenant donc la portée égale à $928^{m},7$, nous sommes certains de ne pas faire une erreur absolue plus grande que $1^{m},6$, ni une erreur relative supérieure à $\frac{1}{580}$.

En prenant $280^{m},0$ pour la hauteur du tir, on ne commet pas une erreur absolue plus grande de $0^{m},2$, ni une erreur relative plus grande de $\frac{1}{1400}$.

On voit par là que la première méthode d'approximation est susceptible d'une grande précision, car la véritable erreur commise est assurément beaucoup plus faible que celle qu'on vient de trouver.

Résultats qu'on obtient à l'aide des tables de M. Otto.

En supposant la résistance proportionnelle au simple carré de la vitesse et prenant

$$k = \frac{c}{1 + \frac{u_0}{r}} = \frac{992}{1 + 0,0012 \times 120} = 867^{m},$$

on trouve, au moyen des tables de M. Otto, que la portée

est égale à $918^m,5$, la hauteur du tir égale à $279^m,5$, l'angle de chute égal à $56°,5'$. Cette portée doit être plus petite que la véritable, parce que, à cause de la valeur attribuée à k, la résistance est trop grande dans toute l'étendue de la trajectoire.

Pour avoir une portée plus grande que la véritable, il suffit de faire correspondre k à la vitesse *minimum*, laquelle est de 59^m en prenant $k = 867^m$; parce qu'ainsi on rend la résistance trop faible dans toute la trajectoire. On obtient de la sorte $k = 926^m$; portée $= 939^m,2$; hauteur du tir $= 283^m,8$; angle de chute $= 55°,37'$.

La moyenne arithmétique entre les deux portées, savoir $928^m,8$, se rapproche beaucoup de la véritable portée.

Résultats fournis par la méthode de M. Didion.

Les formules de M. Didion, quand on considère la trajectoire entière en un seul arc et qu'on prend

$$\alpha = \frac{\xi\,(45^0)}{\text{tang}\,(45^0)},$$

donnent une portée de $943^m,5$. Ce résultat est plus éloigné du véritable que ceux que donnent les tables de M. Otto.

Si pour avoir une plus grande exactitude, on divise la trajectoire en cinq arcs : le premier de 45° à 30°; le second de 30° à 0°; le troisième de 0° à — 30°; le quatrième de — 30° à — 45° et le cinquième enfin de — 45° au point de chute; on obtient pour la portée $932^m,3$, pour la hauteur du tir $281^m,9$. La portée diffère au moins de $\frac{1}{465}$ de la véritable et la hauteur du tir de $\frac{1}{164}$.

Dans le traité de balistique de M. Didion, on trouve décrite graphiquement la trajectoire que nous avons choisie pour exemple. D'après ce tracé, il résulte que

L'amplitude de la branche ascendante est . .	514m
L'amplitude de la branche descendante . . .	430
L'amplitude totale	944
La hauteur du tir	286
La vitesse au point de chute	79,5.

On voit par là que la construction graphique employée n'est guère précise.

Calcul séparé de la branche ascendante et de la branche descendante par la méthode de LEGENDRE.

Pour terminer, nous calculerons le même exemple avec les formules de Legendre citées plus haut (n° 29).

La hauteur due à la vitesse au sommet est donnée par l'équation

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h_0 \cos^2 \theta_0} + 4g \frac{f(u_0)}{u_0^2} \xi(\theta_0).$$

En admettant toujours la même loi de résistance, on a

$$\frac{f(u_0)}{u_0^2} = \frac{1}{2gc}\left(1 = \frac{u_0}{r}\right);$$

de sorte qu'il vient

$$\frac{1}{h'} = \frac{1}{h_0 \cos^2 \theta_0} + \frac{2}{c}\left(1 + \frac{u_0}{r}\right) \xi(\theta_0).$$

Puisque $u_0 = 120^m$, et par suite

$$h_0 = 734^m, \qquad \theta_0 = 45^0,$$

$$\xi(\theta_0) = 1,1477934, \qquad c = 993^m, \qquad \frac{1}{r} = 0,0012,$$

il vient

$$h' = 186^m, \text{ et par suite } u' = 60^m.$$

La vitesse variant donc dans la branche ascendante entre 120^m et 60^m, je prendrai pour déterminer k une vitesse moyenne arithmétique entre ces deux limites, et j'aurai

$$k' = \frac{992}{1 + 0,0012 \times 90} = 895^m.$$

L'amplitude et la hauteur de la branche ascendante sont, en prenant k pour unité,

$$x' = 1 - \cos\theta_0 + C \log\left(\frac{1-C}{\cos\theta_0 - C}\right),$$

$$y' = \frac{1-C^2}{\alpha} x' - \frac{C}{2} \operatorname{tang}\theta_0 - \frac{1}{3\alpha}(1 - \cos^3\theta_0);$$

où

$$C = \cos\theta_0 - \frac{\operatorname{tang}\theta_0}{4h_0},$$

$$\alpha = \sin\theta_0 \cos\theta_0.$$

Après les substitutions, il vient

$$C = 0,4023, \qquad \alpha = \frac{1}{2},$$

$$x' = 0,5638, \qquad y' = 0,3130.$$

En multipliant par l'unité de mesure, on trouve :

Amplitude de la branche ascendante . . .	$504^{m},6$
Hauteur du tir	$280^{m},1.$

Si l'on fait $h' = 186^{m}$ et $y' = 280^{m},1$ dans l'équation

$$\frac{x^2}{3 - \frac{x}{k''}} = \frac{4k'}{3} y',$$

et si l'on prend

$$k'' = \frac{992}{1 + 0{,}0012 \times 60} = 925^{m},$$

on trouve $420^{m},5$, pour l'amplitude de la branche descendante qui, étant ajoutée à celle de la branche ascendante, donne pour la portée totale $925^{m},1$.

Cet exemple nous montre que, quand on fait varier convenablement la valeur du coefficient de la résistance de l'air, la méthode de Legendre est susceptible d'une précision plus grande que celle de M. Didion, quoique les calculs en soient beaucoup moins compliqués.

DU MOUVEMENT

DES

PROJECTILES OBLONGS.

DU MOUVEMENT

DES PROJECTILES OBLONGS.

PRÉFACE.

A l'époque où les trois mémoires suivants ont été écrits, c'est-à-dire entre 1859 et 1861, il régnait des idées assez peu exactes sur le mouvement des projectiles oblongs lancés par les armes à feu rayées. Aucune théorie rigoureuse n'en avait encore été donnée. A la vérité un physicien allemand, Henri-Gustave Magnus, avait, dès 1852, donné la véritable explication de cette déviation permanente des projectiles oblongs, qu'on a nommée *dérivation*, en faisant voir, d'une manière expérimentale, que la cause en est dans le mouvement conique de l'axe de figure du projectile (*);

(*) *Revue de technologie militaire* par Delobel, t. 1, p. 371. Liége, 1854.

mais en France et ailleurs, on continuait à l'attribuer au frottement de l'air sur la partie inférieure du projectile tournant, ainsi que l'avait fait, d'abord, M. Tamisier. Témoin ce qu'on lit dans l'*Aide-Mémoire à l'usage des officiers d'artillerie*, 3me édition, Paris, 1856, p. 921, et dans le *Traité de balistique par le Général Didion*, 2e édition, Paris, 1860, p. 422.

Quelques artilleurs ont tenté d'expliquer les circonstances du tir des projectiles oblongs par des considérations élémentaires, mais avec assez peu de succès. A cet égard, M. le Général russe, Mayevski, fait remarquer très-sensément « qu'un exposé populaire ne peut être exempt d'erreurs « que s'il est l'énoncé des conséquences déduites d'une « analyse rigoureuse et appliquées à la solution de quel- « ques cas particuliers, vérifiés, du moins en partie, par « l'expérience directe »(*).

Dans le même ouvrage, d'où sont extraits ces mots, M. Mayevski parle en ces termes de mes recherches : « il « n'existe jusqu'à présent que le seul travail très-remar- « quable de M. le comte de Saint-Robert sur le mouvement « des projectiles oblongs, qui soit basé sur les principes « rigoureux de la science »(**).

(*) *De l'influence du mouvement de rotation sur la trajectoire des projectiles oblongs dans l'air*, par le Général-Major Mayevski, membre du Comité de l'artillerie russe. Tome V de la *Revue de Technologie militaire* (1865).

(**) Ibid., p. 3.

M. Mayevski, en présentant, le 12 janvier 1865, son travail à l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg, s'est exprimé en ces termes : « Pour ce qui concerne les bases théoriques de nos recherches, elles sont sensiblement conformes à celles qui ont été adoptées par M. le comte de Saint-Robert dans ses mémoires très-remarquables : *Études sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs*, et : *Du mouvement des projectiles lancés par les armes à feu rayées ;* nos bases n'en diffèrent essentiellement que par l'expression de la vitesse angulaire « de l'axe de figure du projectile autour de la tangente. « Nous démontrons que dans le dénominateur de cette « expression doit entrer le moment d'inertie du projectile « autour de son axe de figure. Dans les mémoires de M. le « comte de Saint-Robert, c'est le moment d'inertie du pro- « jectile autour de l'axe équatorial qui entre dans l'expres- « sion ci-dessus » (*).

Je dois un mot d'explication au sujet de cette différence.

Dans un projectile qui tourne avec une grande rapidité, l'axe instantané de rotation et l'axe de figure sont toujours très-voisins, et peuvent être regardés comme à peu près confondus en un seul. Or, l'on sait que les forces centrifuges qui naissent de la rotation se contre-balancent

(*) *Bulletin de l'Acad. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. 8, 1865.

mutuellement, lorsque la rotation a lieu autour de l'axe de figure. C'est pourquoi j'ai négligé le couple dû aux forces centrifuges, dans ces mémoires où je m'étais proposé pour objet principal de donner une idée du mouvement des projectiles oblongs, plutôt que de calculer ce mouvement.

Mais à la rigueur les axes de rotation et de figure, dans un projectile tournant avec une grande vitesse, quoique faisant entre eux un angle fort petit, sont néanmoins distincts; de sorte que le couple dû aux forces centrifuges n'est pas rigoureusement nul.

Dans le cas du mouvement des projectiles, il est très-aisé de tenir compte du couple dû aux forces centrifuges, car son axe coïncide avec l'axe du couple dû aux forces provenant de la résistance de l'air. En composant ensemble ces deux couples, on obtient, pour la vitesse angulaire conique de l'axe de figure, la valeur que M. Mayevski a donnée, valeur qui coïncide d'ailleurs avec celle qu'a trouvée Poisson, dans la solution du problème analogue de la détermination du mouvement d'un solide de révolution, pesant et homogène, autour d'un point fixe situé sur son axe de figure (*).

Cependant, il importe de remarquer que la valeur de la

(*) Voyez Poisson, *Journal de l'École polytechnique*, 16e cahier, t. IX, p. 247 (1813); ainsi que son *Traité de mécanique*, t. II, p. 162 (1833).

vitesse qu'on trouve ainsi n'en est encore qu'une valeur approchée, car la véritable valeur n'est point constante, mais varie périodiquement entre zéro et une valeur double de celle-là.

Dans cette seconde édition de mes mémoires, j'ai ajouté, en note, la modification que produit le couple dû aux forces centrifuges sur la vitesse du mouvement conique. J'y donne, en outre, la solution analytique du problème à l'aide des équations d'Euler, en suivant la route tracée par Poisson.

Turin, mars 1872.

DU MOUVEMENT

DES PROJECTILES OBLONGS.

(*Journal des Sciences militaires*, 5e série, tome XXII, Paris, 1859).

PREMIÈRE PARTIE.

L'emploi des projectiles oblongs se généralise tous les jours de plus en plus dans les différentes armées.

De nombreuses expériences ont été exécutées sur le tir de ces nouveaux projectiles, et leur balistique pratique a fait de grands progrès dans ces derniers temps. Mais nos connaissances théoriques sur leur mouvement laissent beaucoup à désirer, et jusqu'à présent on n'a pas, que je sache, attaqué avec l'analyse mathématique le problème de la détermination de leur mouvement. Cependant il est très-difficile de parvenir à se rendre bien compte de toutes les circonstances du mouvement des nouveaux projectiles sans le secours de ce puissant instrument.

Assurément, la résolution de ce problème est très-ardue; mais, en raison de son importance, on doit tenter tous les efforts pour s'en rendre maître. Il serait à désirer que des géomètres voulussent s'en occuper.

Les formules ordinaires de la balistique, établies pour les projectiles sphériques, sont-elles applicables au tir des projectiles allongés?

Et si elles ne le sont pas, quelles formules faut-il leur substituer?

Voilà des questions de la plus haute importance, dignes de fixer l'attention des personnes qui s'occupent de sciences militaires.

Si les projectiles allongés se meuvent de manière à ce que leur axe de figure reste toujours tangent à la trajectoire qu'ils décrivent, il est clair que les formules ordinaires de la balistique des projectiles sphériques peuvent servir à en calculer la trajectoire, après qu'on y aura modifié convenablement le coefficient ou les coefficients de la résistance de l'air.

Malheureusement, jusqu'à présent, on n'a publié que très-peu de résultats d'expériences sur le tir des projectiles allongés.

Je me propose d'en examiner quelques-uns pour tâcher de résoudre la prémière question.

I.

Quelle que soit la loi de la résistance de l'air qu'on adopte, qu'on suppose celle-ci proportionnelle au carré de la vitesse, ou au carré et au cube, ou enfin au carré et au bicarré, le rapport de la tangente de l'angle de projection à la portée, ou, ce qui revient au même, le rapport de la hausse à la portée est une fonction de la portée qui a la propriété d'être toujours croissante à mesure que la portée augmente.

Voyons si les hausses, et les tangentes déterminées à l'aide de l'expérience, satisfont à cette condition.

Le tableau suivant renferme, en regard des distances, les hausses correspondantes ainsi que les mêmes hausses divisées par les distances, pour la carabine à tige française (*), pour la carabine des *bersagliers* piémontaise, pour le canon de $0^m,16$ rayé piémontais; il renferme, en outre, les tangentes de l'angle de projection, ainsi que ces quantités divisées par les distances, pour une carabine en expérience maintenant (1859), dite *Dixon*.

(*) Voyez *Aide-Mémoire*, 3e édition, page 793.

DISTANCE	CARABINE A TIGE française (1853). Calibre 17mm,8. Pas 2m. Balle 47gr,5. Charge 4gr,5		CARABINE DES BERSAGLIERI piémontaise (1856). Calibre 17mm,3. Pas 2m. Balle 45gr,4. Charge 4gr,25		CANON DE 0m,16 RAYÉ piémontais. Calibre 16c,3. Pas 3m,77. Boulet 30c. Charge 3k		CARABINE DITE DIXON piémontaise. Calibre 12mm,6. Pas 0m,99. Balle 28gr. Charge 5gr.	
	Hausse	Hausse divisée par la distance	Hausse	Hausse divisée par la distance	Hausse	Hausse divisée par la distance	Tangente de l'angle de projection	Tangente divisée par la distance
mètres	mill.		mill.		mill.			
150	10,0	0,067	7,4	0,049	32	0,21	0,0091	0,000061
200	13,0	0,065	9,7	0,048	38	0,19	0,0100	0,000050
300	18,2	0,061	15,9	0,053	52	0,17	0,0142	0,000047
400	24,3	0,061	22,9	0,057	69	0,17	0,0195	0,000049
500	31,5	0,063	30,9	0,062	85	0,17	0,0253	0,000051
600	39,8	0,066	39,5	0,066	100	0,17	0,0319	0,000053
700	49,2	0,070	48,9	0,070	115	0,16	0,0406	0,000058
800	60,0	0,075	60,7	0,076	131	0,16	0,0489	0,000061
900	72,0	0,080			148	0,16	0,0575	0,000064
1000	86,0	0,086			168	0,17	0,0689	0,000069
1500					246	0,16		
2000					342	0,17		
2500					450	0,18		
3000					569	0,19		
3500					701	0,20		
4000					851	0,21		
4500					1019	0,23		
5000					1206	0,24		

D'après ce tableau, on voit que le rapport de la hausse à la distance, ou celui de la tangente de l'angle de projection à la distance, est une quantité qui décroît d'abord à mesure que la distance augmente, qu'elle atteint une valeur minimum, et qu'ensuite elle est croissante, tandis qu'elle devrait être constamment croissante.

Dans le vide cette quantité serait à peu près constante sous les petits angles de projection.

On doit en conclure que les formules ordinaires de la balistique ne peuvent représenter la trajectoire décrite par les projectiles allongés.

Nous allons donner une autre preuve de l'insuffisance de ces formules.

Dans le vide, la projection horizontale de la vitesse de la balle se conserve toujours constante ; dans l'air, par l'effet de la résistance, la projection horizontale de la vitesse décroît à mesure que le projectile s'éloigne du point de départ.

Lorsqu'il s'agit de projectiles sphériques le produit de la vitesse horizontale par la distance est une quantité d'abord croissante avec la distance, qui, après avoir atteint un maximum, décroît ensuite, comme on peut s'en convaincre en examinant la formule qui donne la vitesse horizontale en fonction de la distance. La connaissance expérimentale de ce maximum pourrait servir, pour le dire en passant, à déterminer le coefficient de la résistance de l'air.

Voyons si la marche de ce produit s'observe dans le tir des projectiles oblongs.

Pour la carabine à tige française, on a (*)

(*) Voyez *Aide-Mémoire*, page 793.

DISTANCE	TEMPS	DISTANCE	VITESSE	PRODUIT
mètres	secondes	mètres	mètres	
150	0,50	75	300	22500
200	0,69	175	263	46025
225	0,78	212,5	278	59075
250	0,87	237,5	278	66025
300	1,06	275	263	72325
325	1,15	312,5	278	86875
350	1,25	337,5	250	84375
400	1,44	375	263	98625
450	1,64	425	250	106250
500	1,86	475	227	107825
550	2,10	525	208	109200
600	2,37	575	185	106375
700	2,97	650	167	108550
800	3,67	750	143	107250
900	4,35	850	147	124950
1000	5,07	950	139	132050

Pour le canon rayé de 0^{m},16 on a :

Distance

1000^{m} 2000 3000 4000 5000 .

Durée du trajet

3″,8 7,6 12,2 17, 23,8

d'où l'on tire :

Distance

500m	1500	2500	3500	4500

Vitesse

263m	263	217	185	161

Produit

131500	394500	542500	647500	724500

On voit par là que le produit de la distance par la vitesse est une quantité toujours croissante ; tandis que, suivant les formules ordinaires, il devrait croître d'abord et ensuite décroître.

La conséquence à tirer de tout cela, c'est que les formules qui conviennent aux projectiles sphériques ne peuvent servir à représenter le mouvement des projectiles oblongs.

II.

Passons maintenant à la seconde question. Quelles sont les formules à employer pour calculer la trajectoire des projectiles oblongs ?

Lorsqu'un projectile se meut dans l'air, il est soumis à deux sortes de forces : 1° à la pesanteur qui agit sur chacun de ses points matériels ; 2° à l'action de l'air qui

s'exerce sur tous les points de sa surface. Les forces provenant de l'action de l'air se subdivisent en trois espèces : *a*) forces de résistance proprement dites, normales à la surface, qui n'agissent que sur la partie antérieure du mobile ; *b*) forces de frottement, tangentes à la surface, qui agissent sur tous ses points ; *c*) forces engendrées par l'augmentation ou la diminution de la pression de l'air sur certaines parties de la surface, suivant que ces parties ont un mouvement de rotation dans le même sens, ou en sens inverse, que le mouvement de translation.

Si l'on transporte toutes ces forces, appliquées aux différents points du projectile, parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, il en résultera une force unique et un couple. La première donnera naissance à un mouvement de translation commun à tous les points du corps ; le second engendrera un mouvement de rotation autour de ce centre.

Le transport des forces de gravité au centre de gravité ne donne origine à aucun couple. Il n'en est pas de même des forces provenant de l'action de l'air. Ce n'est que dans quelques cas particuliers que le couple résultant est nul, et par suite nulle la rotation.

Le mouvement de translation dû à la résultante unique est déterminé par les trois équations différentielles secondes

$$[1] \quad \left\{ \begin{array}{l} m \dfrac{d^2x}{dt^2} = X, \\ \\ m \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y, \\ \\ m \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z, \end{array} \right.$$

en représentant par x, y, z les trois coordonnées du centre de gravité au bout du temps t, rapportées à des axes fixes; par m la masse du projectile; par X, Y, Z, les trois composantes, suivant les axes fixes, de la force unique qui résulte du transport au centre de gravité de toutes les forces motrices.

Le mouvement de rotation autour du centre de gravité, produit par le couple résultant, est déterminé par les trois équations différentielles

$$[2] \quad \left\{ \begin{array}{l} A\dfrac{dp}{dt} = (B - C)\,qr + L, \\ \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C - A)\,pr + M, \\ \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A - B)\,pq + N, \end{array} \right.$$

p, q, r étant les trois vitesses angulaires de rotation autour des trois axes principaux du projectile: A, B, C les trois moments d'inertie qui se rapportent à ces axes; L, M, N les couples autour des mêmes axes qu'on obtient en décomposant, suivant ces axes, le couple unique dû au transport de toutes les forces motrices au centre de gravité.

Les six équations [1] et [2] contiennent la solution complète du problème du double mouvement du projectile. Les trois premières font connaître la position du centre de gravité du mobile au bout du temps t; les trois autres font connaître les trois vitesses angulaires p, q, r, qui servent à leur tour à déterminer à tout instant la position des axes

principaux, par rapport aux axes fixes des coordonnées, au moyen des équations

$$[3]\quad \ldots \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} - \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt}, \end{cases}$$

où θ désigne l'angle formé par l'axe principal des z_1 avec l'axe des z; ψ et φ les angles que forme avec l'axe fixe des x et avec l'axe principal des x_1 la trace du plan principal $x_1 y_1$ sur xy.

Les forces X, Y, Z et les couples L, M, N peuvent être des fonctions de φ, ψ, θ; alors les neuf équations [1], [2], [3] détermineront les quantités x, y, z, p, q, r, φ, ψ, θ.

On pourrait éliminer p, q, r entre les équations [2] et [3]; alors les équations seraient réduites à six; mais en général il vaudra mieux conserver les neuf inconnues et prendre les neuf équations [1], [2], [3], pour les équations différentielles du problème. Leurs intégrales complètes contiendront douze constantes arbitraires, qu'on déterminera au moyen des valeurs initiales de x, y, z, ψ, φ, θ et de celle des vitesses

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\theta}{dt}.$$

Occupons-nous maintenant de la détermination des quantités X, Y, Z, L, M, N que renferment les équations [1]

et [2], et qui proviennent, dans la question que nous considérons, de la pesanteur, de la résistance de l'air, de son frottement et de l'excès de pression sur certaines parties de la surface et de la dépression sur d'autres.

La résistance proprement dite du fluide s'exerce normalement sur chaque élément de la surface antérieure, et est une fonction de la vitesse complète de l'élément: cette vitesse complète est celle qui résulte du double mouvement de translation et de rotation du projectile.

Attendu que, dans le mouvement des projectiles allongés, la vitesse de rotation estimée suivant la normale à la surface est très-petite, et que d'ailleurs la considération de la vitesse complète entraîne dans des complications, on pourrait, pour une première approximation, négliger la vitesse de rotation et n'avoir égard qu'à la vitesse de translation pour déterminer la résistance proprement dite.

Le frottement en chaque point de la surface du projectile dépend de la composante de la vitesse complète de ce point, tangente à la surface, et de la densité de l'air en ce même point.

Le frottement comparé aux autres forces qui sollicitent le mobile est assez faible, de sorte que, pour une première approximation, on pourrait en faire abstraction.

Relativement au troisième effet produit par l'air dans lequel le projectile est en mouvement, comme c'est un fait découvert récemment, on nous permettra d'entrer dans quelques détails.

M. Magnus a démontré, au moyen d'expériences ingénieuses, que si un courant d'air vient frapper un projectile en repos, la pression exercée sur les deux côtés de celui-ci est moindre que si l'air était en repos; mais les pressions sont les mêmes des deux côtés: tandis que si le

projectile tourne, la pression de l'air est moindre du côté où l'air se meut dans le même sens que la surface du projectile, et plus grande de l'autre côté où le mouvement de rotation ne s'accorde pas avec le mouvement de translation.

La raison de ce fait est la suivante. Si deux courants d'air vont à la rencontre l'un de l'autre, leurs mouvements ne s'annulleront pas; mais l'air prendra un mouvement latéral, perpendiculaire à la direction commune des deux courants.

Dans le cas du projectile tournant, l'air entraîné par sa surface se meut d'un côté du projectile en sens inverse du courant d'air, et dans le même sens de l'autre côté. De la rencontre des deux courants, du côté où ils sont opposés, il résulte un mouvement latéral de l'air qui se traduit par une augmentation de pression de ce côté. Le mouvement de rotation, combiné avec le mouvement de translation, entraîne donc une augmentation de pression d'un côté, une diminution de l'autre.

La considération de ces forces nées de la rotation explique d'une manière très-satisfaisante les déviations énormes que donnent les projectiles sphériques excentriques, déviations qu'il était impossible d'expliquer par la considération de la seule force du frottement de l'air.

En ne tenant compte que du frottement, l'illustre Poisson avait conclu à une déviation en sens contraire de la rotation de l'hémisphère antérieur; ce qui est en opposition directe avec ce qui se passe dans le tir.

Dans l'état actuel de la science, il serait assez difficile de donner une expression analytique des différences de pression de l'air sur les faces opposées du projectile; mais, dans la question que nous considérons du mouvement des projectiles oblongs, comme pendant le trajet leur axe de

rotation ne s'écarte jamais beaucoup de la direction de la vitesse du centre de gravité, la différence entre les pressions de l'air sur les deux côtés du mobile ne peut être que très-petite, et l'on pourra en faire abstraction.

De tout ce qui précède, il résulte que, pour une première approximation, on pourrait se borner à ne considérer, parmi les forces provenant de l'action de l'air sur la surface du projectile, que les forces de résistance proprement dites qui seront en chaque point du corps une fonction de la composante de la vitesse de translation, normale à la surface en ce point.

Si la résultante de toutes les résistances élémentaires, exercées sur la surface du projectile, passait, quelle que fût sa position, constamment par le centre de gravité, les couples L, M, N seraient nuls. Alors si le mobile n'a reçu aucune rotation initiale, il se conservera toujours parallèle à lui-même, dans tout son mouvement, et les trois équations [1] suffisent pour en calculer le mouvement.

Ce cas se présente en nature lorsque le projectile, n'ayant point reçu de rotation initiale, a les formes suivantes: une sphère lancée d'une manière quelconque; un corps de révolution qui a un centre, lancé dans une direction perpendiculaire à son axe de figure; un prisme ou un cylindre droit lancé d'une manière quelconque; un polyèdre régulier; un cône, ou tronc de cône droit, dont l'ouverture au sommet soit telle que la normale à la génératrice au centre de gravité de ses éléments superficiels trapéziformes, coupe l'axe au centre de gravité de son volume; un cylindre surmonté par deux cônes, ou cônes tronqués, égaux dont l'ouverture au sommet soit telle que la normale au centre de gravité des éléments superficiels passe par le centre de gravité du cylindre; un cylindre surmonté par deux

segments de sphère égaux dont le centre coïncide avec le centre de gravité du cylindre, etc.

Les formules ordinaires de la balistique, dont on s'est servi jusqu'ici pour calculer la trajectoire des projectiles, supposent en outre que la résistance, transportée au centre de gravité du corps, soit toujours dirigée suivant la tangente à la courbe que décrit ce centre. Cette condition n'est satisfaite que quand le projectile est un corps de révolution ayant un centre, lancé perpendiculairement à son axe de figure, et de plus homogène, ou tel que son centre de gravité coïncide avec le centre de figure, et auquel on n'a imprimé aucune rotation à l'origine du mouvement.

Si l'on suppose que, malgré une rotation initiale, la résultante de toutes les forces motrices qui agissent sur le mobile, passe encore constamment par son centre de gravité, alors le mouvement de rotation autour de ce point est le même que si ces forces n'existaient pas; les deux mouvements de translation et de rotation sont indépendants l'un de l'autre. Dans ce cas on parvient à intégrer sous forme finie, les équations différentielles [2] du mouvement de rotation, au moyen des transcendantes elliptiques; et même on peut se rendre compte géométriquement du mouvement que poursuit le solide, à l'aide de la théorie lumineuse de M. Poinsot.

Mais pour que l'indépendance des deux mouvements ait lieu, il faut négliger les actions de l'air sur la surface du mobile, engendrées par sa rotation. En réalité tout mouvement de rotation développe des forces nouvelles de la part de l'air, qui influent, à la fois, sur le mouvement de translation et sur le mouvement de rotation du mobile, de sorte que ces deux mouvements simultanés dépendent l'un de l'autre et ne peuvent pas être déterminés séparément.

Chacune de leurs six équations différentielles renferme à la fois les trois inconnues angulaires et les trois coordonnées du centre de gravité; et ce système d'équations ne peut plus s'intégrer que par les méthodes d'approximation.

Il importe de remarquer que même dans le cas où un corps de révolution, tel qu'un projectile allongé, tourne autour de l'axe de figure, dans le sens duquel il se meut, le mouvement du centre de gravité est dérangé par le frottement de l'air et par l'augmentation de pression qui se produit d'un côté et la dépression de l'autre. Car, si l'axe de figure et de rotation est tangent à la trajectoire, le frottement est égal et contraire pour deux éléments opposés de chaque section de la surface, perpendiculaire à l'axe de rotation, et de plus, toutes les pressions sont aussi égales autour de cet axe: d'où il résulte que toutes ces forces exercées sur tous les éléments, étant transportées au centre de gravité, s'y détruiront deux à deux. Mais l'axe de rotation tend à se conserver parallèle à lui-même; en sorte que, si à l'origine il est dans la direction exacte du mouvement, l'instant après il ne sera plus tangent à la trajectoire qui s'est infléchie, en vertu de la force de gravité. L'angle, formé par l'axe et par la tangente, suffit pour produire une différence dans les frottements et dans les pressions que l'air exerce sur l'un et sur l'autre côté du mobile, de sorte que le centre de gravité sera entraîné hors de la ligne qu'il parcourrait, si la rotation n'existait pas.

C'est pour ramener l'axe sur la tangente qu'on a, dans certains projectiles oblongs, creusé des gorges à la partie postérieure de leur surface; mais l'effet de ces cannelures, en raison de la rotation du projectile, est de faire sortir l'axe de rotation du plan de la trajectoire. En effet, si l'on applique une force à un point de l'axe autre que le centre

de gravité, l'effet produit varie suivant que le mobile est ou n'est pas doué d'une rotation autour de cet axe.

Si le corps n'a aucune rotation, la force qu'on applique sur l'axe l'entraîne dans le plan passant par la direction de cet axe et par celle de la force; mais si le corps est doué d'une rotation autour de son axe, celui-ci ne reste pas alors dans le plan de la force: il commence à se mouvoir latéralement dans une direction perpendiculaire à ce même plan, et décrit un cône dont le sommet est au centre de gravité et dont l'axe est parallèle à la force.

C'est pourquoi les cannelures qui étaient autrefois considérées comme nécessaires à la justesse du tir tendent à disparaître des projectiles plus récents. Les Anglais, par exemple, ont supprimé les cannelures dans la balle de leur nouvelle carabine dite d'Enfield. Certes, les difficultés de construction des balles à cannelures ont aussi contribué à faire prendre cette mesure.

C'est dans le déplacement latéral de l'axe, produit par la résistance de l'air, que réside la vraie cause de la *dérivation*, comme l'a montré le premier M. Magnus, et non dans le frottement de l'air comme l'ont prétendu quelques-uns.

Pour revenir à la question qui nous occupe, voyons la manière de la simplifier autant qu'il est possible.

Les projectiles oblongs qu'on emploie aujourd'hui ont à peu près la forme d'un cylindre droit. Supposons donc que le projectile soit un cylindre droit, dont le centre de gravité soit sur l'axe de figure.

Le problème à résoudre, réduit à sa plus grande simplicité, sera le suivant:

Un cylindre droit, dont le centre de gravité est sur l'axe, doué d'un mouvement de rotation autour de son

axe, est lancé dans l'air dans la direction du même axe; il s'agit d'en déterminer le mouvement.

Commençons par nous occuper de la détermination de la résistance de l'air sur un tel projectile.

La résistance du fluide s'exercera sur la base plane antérieure et sur la surface convexe latérale.

La première sera égale au produit d'un coefficient numérique par cette base, par la densité du fluide, par le carré de la vitesse de translation estimée suivant l'axe, d'après l'hypothèse ordinaire que nous admettrons pour la résistance. Nous la représenterons, pour mettre l'homogénéité en évidence, par la formule

$$mg\,\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta,$$

en désignant par m la masse du projectile, par g la gravité, par u la vitesse du centre de gravité, par k une constante donnée, par δ l'angle que forme la direction de la vitesse u avec l'axe du cylindre.

Passons à la résistance sur la surface convexe du projectile. On sait, et il est très-facile de le démontrer, que la résistance sur la surface convexe d'un cylindre circulaire est les $^2/_3$ de celle de sa base rectangulaire.

La vitesse de translation, estimée perpendiculairement à l'axe du cylindre, étant $u \sin\delta$; la résistance sur le côté convexe du cylindre pourra être représentée par

$$mg\,\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta,$$

en désignant par l une constante donnée.

Le point d'application de cette résistance sera le point milieu de l'axe de figure du cylindre, de sorte que si l'on désigne par D la distance de ce point au centre de gravité, le transport de la résistance au centre de gravité donnera naissance à un couple dont le moment sera

$$mgD\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta,$$

et dont l'axe sera à la fois normal à la trajectoire que décrit le centre de gravité du projectile et à l'axe de figure de celui-ci.

En résumant, l'action de l'air exercée sur le projectile cylindrique se réduit à deux forces rectangulaires appliquées à son centre de gravité, l'une

$$mg\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta,$$

dans la direction de l'axe de figure, l'autre

$$mg\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta,$$

perpendiculaire au même axe et comprise dans le plan qui contient cet axe et la tangente à la trajectoire du centre de gravité. Plus un couple

$$mgD\frac{u^2}{\ldots}\sin^2\delta,$$

compris dans ce dernier plan.

Bien que réduit à cette simplicité, le problème ne laisse pas que de présenter des difficultés très-grandes, tant qu'on suppose la distance D différente de zéro.

Nous allons d'abord nous occuper du cas où la distance D est nulle, c'est-à-dire du cas où la résultante de l'action de l'air sur le mobile est constamment dirigée vers le centre de gravité.

Dans ce cas, il n'est point nécessaire d'avoir recours aux équations [2] qui régissent la rotation, pour voir que le corps tournera constamment avec une vitesse angulaire constante autour de son axe de figure, qui demeurera immobile dans le corps et parallèle toujours à lui-même dans l'espace absolu. En effet, la rotation ayant lieu autour d'un axe principal, les forces centrifuges que développe la rotation ne produiront aucune pression sur l'axe, de telle sorte que le mouvement continuera indéfiniment autour de cette droite, si aucun couple étranger n'agit sur le mobile.

Par conséquent, le projectile se conservera constamment parallèle à lui-même dans tout son trajet, et tournera toujours uniformément autour de l'axe de figure. Nous n'aurons donc qu'à nous occuper du mouvement de translation de son centre de gravité.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le point de départ du centre de gravité, pour axe des x la direction de la vitesse initiale, pour axe des y une perpendiculaire au premier axe comprise dans le plan vertical qui contient la direction initiale du mouvement. Les x positifs seront dirigés dans le sens de la vitesse initiale; les y positifs dans le sens de la pesanteur.

De cette manière, deux des trois équations [1] suffiront pour déterminer le mouvement, car le centre de gravité ne sortira pas du plan xy.

Si l'on désigne par α l'angle formé par la gravité g avec l'axe des y, ou l'angle de projection, les forces qui agissent sur le projectile seront :

$$-mg\sin\alpha, \qquad -mg\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta,$$

suivant l'axe des x; et

$$mg\cos\alpha, \qquad -mg\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta,$$

suivant l'axe des y. Donc les équations du mouvement de translation seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\alpha - mg\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg\cos\alpha - mg\frac{u^2}{l^2}\sin\delta.$$

Les produits $u\cos\delta$ et $u\sin\delta$ représentent les composantes de la vitesse suivant les axes des x et des y: en leur substituant

$$\frac{dx}{dt} \text{ et } \frac{dy}{dt},$$

on obtient :

$$[4] \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{k^2}{g}\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2\sin\alpha - \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2, \\ \\ \dfrac{l^2}{g}\dfrac{d^2y}{dt^2} = l^2\cos\alpha - \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2, \end{array} \right.$$

équations où les variables sont séparées, et qui peuvent s'intégrer immédiatement.

En intégrant une première fois et désignant par a une constante arbitraire, et par e la base des logarithmes népériens, on obtient pour les composantes de la vitesse suivant les deux axes des coordonnées,

$$[5]\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = k\sqrt{\sin\alpha}\,\operatorname{tang}\left(a - \dfrac{gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}\right), \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = l\sqrt{\cos\alpha}\left(\dfrac{e^{\frac{2gt}{l}\sqrt{\cos\alpha}} - 1}{e^{\frac{2gt}{l}\sqrt{\cos\alpha}} + 1}\right). \end{array}\right.$$

Pour déterminer la constante a, soit u_0 la vitesse initiale, nous aurons

$$\operatorname{tang} a = \frac{u_0}{k\sqrt{\sin\alpha}}.$$

On aura, pour la vitesse à un instant quelconque,

$$u^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2},$$

dont la direction sera déterminée par l'équation

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}.$$

Si α était négatif, la valeur de la composante suivant l'axe des x se changerait en

$$[6] \quad \ldots \quad \frac{dx}{dt} = k\sqrt{\sin\alpha}\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}} + b}{e^{\frac{2gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}} - b}\right),$$

où l'on a fait

$$b = \frac{u_0 - k\sqrt{\sin\alpha}}{u_0 + k\sqrt{\sin\alpha}}.$$

Si $\alpha = 0$, on aurait

$$[7] \quad \ldots \quad \frac{dx}{dt} = \frac{u_0}{1 + \frac{g u_0}{k^2} t}.$$

Au moyen d'une seconde intégration, on obtient

$$[8] \quad \ldots \quad \begin{cases} x = \dfrac{k^2}{g} \log \dfrac{\cos\left(\alpha - \dfrac{gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}\right)}{\cos\alpha}, \\ y = \dfrac{l^2}{g} \log \dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{l}\sqrt{\cos\alpha}} + e^{-\frac{gt}{l}\sqrt{\cos\alpha}}\right), \end{cases}$$

pour les coordonnées de la trajectoire en fonction du temps. Les logarithmes sont népériens.

Si α était négatif, on aurait, pour l'abscisse,

$$[9] \quad \ldots \quad x = \frac{k^2}{g} \log \left(\frac{e^{\frac{gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}} - be^{-\frac{gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}}}{1 - b}\right);$$

et si $\alpha = 0$,

$$[10] \ldots \quad x = \frac{k^2}{g} \log\left(1 + \frac{g u_0}{k^2} t\right).$$

La valeur de $\frac{dx}{dt}$ en fonction de t, dans le cas de $\alpha > 0$, montre que la vitesse, suivant l'axe des x, diminue à mesure que le temps augmente. Cette vitesse devient nulle pour une valeur t_1 du temps qui satisfait à l'équation

$$a = \frac{g t_1}{k} \sqrt{\sin \alpha}.$$

Les coordonnées x_1, y_1, correspondantes à cet instant, seront

$$x_1 = -\frac{k^2}{g} \log \cos \alpha,$$

$$y_1 = \frac{l^2}{g} \log \frac{1}{2}\left(e^{\frac{ak}{l}\sqrt{\cot \alpha}} + e^{-\frac{ak}{l}\sqrt{\cot \alpha}}\right).$$

La vitesse du projectile, en ce point, aura une direction parallèle à l'axe des y, et sa valeur sera

$$u_1 = l \sqrt{\cos \alpha}\left(\frac{e^{\frac{2ak}{l}\sqrt{\cot \alpha}} - 1}{e^{\frac{2ak}{l}\sqrt{\cot \alpha}} + 1}\right).$$

Le mobile, arrivé à ce point (x_1, y_1) cessera d'avancer dans le sens des x et il reviendra en arrière; mais alors la résistance

$$m\frac{k^2}{g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

changera de signe et s'exercera sur la base opposée du cylindre. A partir de cet instant, le mouvement selon l'axe des x sera déterminé par l'équation

$$[11]\ldots\ldots \frac{k^2}{g}\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2\sin\alpha + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2;$$

tandis que dans le sens de l'axe des y le mouvement sera toujours déterminé par la seconde des équations [4].

En prenant le point (x_1, y_1) pour origine des coordonnées, les intégrales de l'équation [11] sont

$$[12]\ldots\ldots \frac{dx}{dt} = k\sqrt{\sin\alpha}\left(\frac{1-e^{\frac{2gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}}}{1+e^{\frac{2gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}}}\right),$$

$$[13]\ldots\ldots x = \frac{k^2}{g}\log\left(\frac{2}{e^{\frac{gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}} + e^{-\frac{gt}{k}\sqrt{\sin\alpha}}}\right).$$

Au delà du point (x_1, y_1), où la vitesse $\frac{dx}{dt}$ s'annulle, il faut remplacer par ces dernières valeurs de $\frac{dx}{dt}$ et de x les valeurs trouvées plus haut.

Les formules que nous venons de trouver fournissent la solution complète de la question, puisqu'elles permettent de trouver la vitesse du projectile et ses coordonnées au bout d'un temps quelconque.

L'amplitude horizontale du jet, c'est-à-dire la distance à l'origine du point où la courbe coupe l'horizontale passant par l'origine, s'obtiendra en cherchant d'abord le temps qui satisfait à l'équation

$$y = x \operatorname{tang} \alpha,$$

et calculant ensuite la valeur de

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Nous nous abstiendrons de discuter la courbe décrite, parce que cette discussion nous conduirait trop loin, et que d'ailleurs elle ne présente aucune difficulté : nous signalerons seulement deux particularités assez remarquables de cette trajectoire.

Dans le cas de $\alpha > 0$, la trajectoire suffisamment prolongée vient couper la verticale passant par le point de départ, toutes les fois que les coefficients de la résistance de l'air satisfont à la condition

$$\frac{k^2}{l^2} > \operatorname{tang} \alpha.$$

Dans le cas de $\alpha < 0$, la même chose a lieu toutes les fois que

$$\frac{k^2}{l^2} < \text{tang } \alpha,$$

c'est-à-dire que le projectile revient en arrière après avoir été lancé en avant, lorsque les conditions précitées sont satisfaites.

Dans le cas de $\alpha > 0$, la courbe a un point d'inflexion lorsque

$$\frac{k^2}{l^2} < \text{tang } \alpha ;$$

et dans le cas de $\alpha < 0$, la trajectoire a un point d'inflexion lorsqu'on a simultanément

$$\frac{k^2}{l^2} > \text{tang } \alpha \quad \text{et} \quad u < k\sqrt{\sin \alpha}.$$

Pour apprécier maintenant jusqu'à quel point les résultats déduits de ces formules s'accordent avec ceux de la pratique, nous allons calculer les portées de la carabine Dixon. Je choisis cet exemple, parce que la balle de cette carabine est presque cylindrique, et parce que les résultats qu'elle a donnés, et que j'ai rapportés plus haut, sont assez réguliers.

A l'aide du pendule balistique, on a trouvé que 5 grammes

de poudre, dans la carabine Dixon, impriment à la balle du poids de 28 grammes une vitesse initiale de 377 mètres. De plus, on a observé que la balle employait 3″,8 pour fournir la portée de 800 mètres, avec l'angle de projection dont la tangente est 0,0489. Ces données permettent de déterminer les valeurs des coefficients k et l. Pour cela, il n'y a qu'à poser dans les formules [8]

$$u_0 = 377^m, \quad \text{tang}\,\alpha = 0{,}0489, \quad x = 800\cos\alpha = 799^m{,}04,$$

$$y = 800\sin\alpha = 39^m{,}11, \quad t = 3''{,}8, \quad g = 9^m{,}80517.$$

On en tire

$$k = 85{,}70, \qquad l = 13{,}84.$$

Arrêtons-nous un instant sur ces résultats.

On représente en général la résistance exercée sur un corps mû dans un fluide par l'expression

$$n\Pi\Omega H,$$

dans laquelle Π désigne le poids de l'unité de volume du fluide, Ω l'aire de la projection du corps sur un plan perpendiculaire à la direction du mouvement, $H = \frac{u^2}{2g}$ la hauteur due à la vitesse du corps, n un coefficient numérique dépendant essentiellement de la forme du corps. D'après les dénominations adoptées plus haut, nous avons, en appelant n le coefficient relatif à la partie antérieure de la balle, et n' le coefficient relatif à la partie latérale,

$$mg\frac{u^2}{k^2} = n\Pi\Omega\frac{u^2}{2g} \quad \text{et} \quad mg\frac{u^2}{l^2} = n'\Pi\Omega'\frac{u^2}{2g};$$

d'où l'on tire

$$n = \frac{2mg^2}{k^2\Pi\Omega}, \qquad n' = \frac{2mg^2}{l^2\Pi\Omega'}.$$

Dans la balle Dixon l'aire de la section transversale est $0^{m2},000113$, et celle de la section longitudinale est $0^{m2},000265$. En faisant donc

$$\Omega = 0^{m2},000113, \qquad \Omega' = 0^{m2},000265,$$

$$\Pi = 1^{k},2, \qquad mg = 0^{k},028, \qquad g = 9^{m},80517,$$

il vient

$$n = 0,55, \qquad n' = 9,01.$$

Le coefficient $n = 0,55$, relatif à la partie antérieure du corps, est assez d'accord avec les résultats fournis par les expériences directes sur la résistance des corps; mais le coefficient $n' = 9,01$, relatif à la partie latérale, est beaucoup trop grand; il devrait tout au plus être égal à l'unité. Il faut en conclure que la balle ne se conserve pas parallèle à elle-même dans tout son trajet, et qu'elle fait un angle plus grand avec l'élément de la trajectoire que nous ne l'avons supposé.

Au moyen des valeurs trouvées des constantes k et l, on peut calculer la portée correspondante à un angle donné de projection. J'ai calculé les portées pour chacun des angles trouvés par les expériences rapportées au commencement de cette étude, soit à l'aide des nouvelles formules, soit par les formules ordinaires de la balistique, et je les ai comparées aux portées observées; tel est l'objet du tableau suivant.

CALCUL DES PORTÉES *d'après les formules qui supposent le projectile cylindrique et homogène, et d'après les formules ordinaires de la balistique.*

TANGENTE de l'angle de projection	PORTÉE		DIFFÉRENCE divisée par la portée observée	PORTÉE calculée par les formules ordinaires	DIFFÉRENCE divisée par la portée observée
	Observée	Calculée par les formules [8]			
0,0091	150	206	+ 0,373	228	+ 0,520
0,0100	200	222	+ 0,110	246	+ 0,230
0,0142	300	296	— 0,013	331	+ 0,103
0,0195	400	379	— 0,052	424	+ 0,060
0,0253	500	461	— 0,078	516	+ 0,032
0,0319	600	560	— 0,067	606	+ 0,010
0,0406	700	683	— 0,024	711	+ 0,017
0,0489	800	800	0,000	800	0,000
0,0575	900	916	+ 0,018	880	— 0,022
0,0689	1000	1063	+ 0,063	975	— 0,025
Somme des écarts, abstraction faite du signe.			0,798		1,019

L'accord des résultats fournis par les formules [8] avec les résultats observés n'est point parfait. Cependant on voit que ceux-ci sont mieux représentés par les formules [8] que par les formules ordinaires, basées sur la supposition que la résistance est constamment dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

NOTE. Le calcul numérique des formules, que nous venons de trouver dans cette étude, serait beaucoup facilité par une table de *sinus, cosinus,* etc. hyperboliques. *Gudermann* a publié des Tables de ces fonctions dans le *Journal de Crelle,* vol. VI, VII, VIII, IX (*).

Turin, mars 1859.

(*) Depuis la première édition de ce mémoire les tables hyperboliques suivantes ont paru :

ANGELO FORTI. *Tavole dei logaritmi delle funzioni circolari ed iperboliche.* Pisa, 1863. — 2ᵉ édition. Turin, 1870.

GRONAU. *Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren.* Danzig, 1863.

HOÜEL. *Recueil de formules et de tables numériques.* Paris, 1866.

(*Note de 1872*).

DU MOUVEMENT

DES PROJECTILES OBLONGS.

(*Journal des Armes spéciales et de l'État-Major*, 4e série. Tome XIII. Paris, 1860).

SECONDE PARTIE.

La détermination du mouvement des projectiles oblongs, lancés par les armes à feu rayées, est un problème très-complexe qui pris dans toute sa généralité, présente de grandes difficultés. Dans la première partie de ces études, nous avons tâché de le préciser, d'en démêler les éléments les plus essentiels, de le dégager de ce qui ne peut être résolu, dans l'état actuel de nos connaissances sur la manière dont l'air agit sur les différents points de la surface du projectile. Ainsi dégagé de toutes les circonstances secondaires, qui ne peuvent avoir qu'une influence assez faible sur le résultat final, le problème devient, nous ne dirons pas, certes, facile à résoudre, mais du moins attaquable par l'analyse mathématique.

Nous avons fait voir qu'en négligeant le frottement de l'air et l'inégalité des pressions de ce fluide, dus au mouvement de rotation, on pouvait réduire les forces qui agissent sur le projectile à trois forces appliquées à son centre de gravité et à un couple, savoir: 1° le poids du projectile; 2° la résistance de l'air estimée suivant l'axe de figure du projectile; 3° la résistance estimée suivant une normale à cet axe; 4° un couple dû au transport de la résistance de l'air au centre de gravité.

Nous nous sommes occupé du cas où le projectile a la forme d'un cylindre droit et où le couple est nul, ou, en d'autres termes, du cas où la résistance de l'air passe constamment par le centre de gravité. Il s'agit maintenant de nous occuper du cas général où le couple n'est point nul; mais avant d'aborder cette question nous allons considérer le cas où, le couple étant toujours nul, l'axe du projectile et la direction de la vitesse initiale du centre de gravité ne sont point dans le même plan vertical. C'est une introduction nécessaire au cas général.

I.

Un projectile cylindrique, dont le centre de gravité est au milieu de l'axe, doué d'un mouvement de rotation autour du même axe, étant lancé dans l'air avec une vitesse donnée, dans une direction quelconque, déterminer son mouvement.

Il est d'abord évident que l'axe du projectile se conservera parallèle à lui-même, pendant toute la durée du

mouvement, et que la rotation autour de cet axe ne recevra aucune altération, car il n'existe aucune cause pour modifier la direction de l'axe et la rotation.

Nous avons vu, dans la première partie de ces études, que les deux composantes de la résistance de l'air sont:

$$mg\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta$$

suivant l'axe, et

$$mg\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta$$

suivant une normale à l'axe, comprise dans le plan de celui-ci et de la direction de la vitesse du centre de gravité; en désignant par mg le poids du projectile, par u la vitesse du centre de gravité, par k, l deux coefficients numériques donnés, par δ l'angle que forme la direction de la vitesse u avec l'axe du projectile.

Prenons pour origine le centre de gravité du projectile au point de départ; pour axe des x l'axe de figure du projectile dans sa position initiale, pour axe des y une perpendiculaire à l'axe des x, comprise dans le plan vertical passant par celui-ci; pour axe des z une perpendiculaire au plan des xy. Les x seront comptés comme positifs en allant du centre de gravité vers la partie antérieure du projectile; les y seront comptés comme positifs de haut en bas; les z seront comptés comme positifs à la gauche de l'observateur placé à l'origine et tourné vers la trajectoire.

Soit ψ l'angle que fait l'axe du projectile avec la verticale, angle compté à partir du zénith, et s'étendant depuis

zéro jusqu'à 180°. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, cet angle est constant pendant toute la durée du mouvement. Désignons par ϵ l'angle que fait avec l'axe des y la projection de la direction de la vitesse u sur le plan des yz. Cet angle sera compté à partir de l'axe des y en allant vers l'axe des z, et pourra s'étendre depuis zéro jusqu'à 360°.

Les projections de la vitesse u sur les trois axes des x, des y, des z sont:

$$u \cos \delta, \qquad u \sin \delta \cos \epsilon, \qquad u \sin \delta \sin \epsilon.$$

Les projections de la force mg sur les mêmes axes sont:

$$mg \cos \psi, \qquad mg \sin \psi, \qquad \text{zéro.}$$

Les projections de la force

$$mg \frac{u^2}{k^2} \cos^2 \delta$$

sont:

$$mg \frac{u^2}{k^2} \cos^2 \delta, \qquad \text{zéro}, \qquad \text{zéro.}$$

Les projections de la force

$$mg \frac{u^2}{l^2} \sin^2 \delta$$

sont:

$$\text{zéro}, \qquad mg \frac{u^2}{l^2} \sin^2 \delta \cos \epsilon, \qquad mg \frac{u^2}{l^2} \sin^2 \delta \sin \epsilon.$$

Les équations du mouvement de translation sur les trois axes des x, des y, des z seront donc :

$$m\frac{d(u\cos\delta)}{dt} = -mg\cos\psi - mg\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta,$$

$$m\frac{d(u\sin\delta\cos\epsilon)}{dt} = mg\sin\psi - mg\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta\cos\epsilon,$$

$$m\frac{d(u\sin\delta\sin\epsilon)}{dt} = -mg\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta\sin\epsilon.$$

La première de ces trois équations représente le mouvement du projectile qui glisserait sans frottement sur l'axe des x en le touchant toujours par sa génératrice ; les deux autres équations représentent le mouvement du projectile qui glisserait sans frottement sur le plan des yz en le touchant toujours par sa base.

On peut se former une idée nette du mouvement du projectile libre, en concevant deux autres projectiles égaux : le premier enfilé suivant son axe de figure sur l'axe des x, auquel on imprime une vitesse initiale égale à la projection sur l'axe des x de la vitesse initiale du projectile libre ; le second assujetti à glisser par sa base plane sur le plan des yz, auquel on imprime une vitesse initiale égale à la projection sur ce plan de la vitesse du projectile libre. Ces deux projectiles assujettis, l'un à glisser sans frottement sur l'axe des x, l'autre à glisser sans frottement sur le plan des yz, seront, pendant toute la durée du mouvement, les projections du projectile lancé librement dans l'air.

Ces deux mouvements des projections du mobile sur l'axe des x et sur le plan des yz, sont indépendants l'un de

l'autre ; les formules ordinaires de la balistique des projectiles sphériques leur sont applicables. Nous n'entrerons point ici dans les développements de calcul qu'on peut trouver dans les traités de mécanique rationnelle, et nous donnerons seulement le résultat final.

Le mouvement sur l'axe des x sera déterminé par les équations (*)

$$u \cos \delta = k \sqrt{\cos \psi} \operatorname{tang} \left(a - \frac{g t}{k} \sqrt{\cos \psi} \right),$$

$$x = \frac{k^2}{g} \log \frac{\cos \left(a - \frac{g t}{k} \sqrt{\cos \psi} \right)}{\cos a},$$

en désignant par a une constante telle qu'on ait

$$\operatorname{tang} a = \frac{u_0 \cos \delta_0}{k \sqrt{\cos \psi}},$$

où u_0 et δ_0 sont les valeurs initiales de u et δ.

Dans le cas de

$$\psi = \frac{\pi}{2},$$

on aurait

$$u \cos \delta = \frac{u_0 \cos \delta_0}{1 + \frac{g u_0 \cos \delta_0}{k^2} t},$$

$$x = -\frac{k^2}{g} \log \left(1 - \frac{g u_0 \cos \delta_0}{k^2} t \right).$$

(*) Voyez 1re Partie, page 182 et suiv.

Dans le cas de

$$\psi > \frac{\pi}{2},$$

on aurait

$$u \cos \delta = k \sqrt{-\cos \psi} \operatorname{tang} ha \left(a + \frac{gt\sqrt{-\cos \psi}}{k} \right),$$

$$x = \frac{k^2}{g} \log \frac{\cos h \left(a + \frac{gt\sqrt{-\cos \psi}}{k} \right)}{\cos ha};$$

où l'on a fait

$$\operatorname{tang} ha = \frac{u_0}{k\sqrt{-\cos \psi}}.$$

Nous employons ici la notation qui commence à se généraliser

$$\sin ha = \frac{e^a - e^{-a}}{2}, \qquad \cos ha = \frac{e^a + e^{-a}}{2};$$

ce sont ce qu'on appelle le *sinus* et le *cosinus hyperboliques*, liés l'un à l'autre par l'équation

$$\cos h^2 a - \sin h^2 a = 1.$$

Le mouvement sur le plan des yz sera déterminé par les formules

$$u \sin \delta = \frac{l\sqrt{\sin \psi}}{\sin \epsilon \left(\frac{l^2 \sin \psi}{u_0^2 \sin^2 \delta_0 \sin^2 \epsilon_0} + 2 \int_{\epsilon}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{\sin^3 \epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$y = \frac{l^2}{g}\int_{\epsilon}^{\epsilon_0} \frac{\cos\epsilon\, d\epsilon}{\sin^3\epsilon\left(\dfrac{l^2\sin\psi}{u_0^2\sin^2\delta_0\sin^2\epsilon_0} + 2\displaystyle\int_{\epsilon}^{\epsilon_0}\frac{d\epsilon}{\sin^3\epsilon}\right)},$$

$$z = \frac{l^2}{g}\int_{\epsilon}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{\sin^2\epsilon\left(\dfrac{l^2\sin\psi}{u_0^2\sin^2\delta_0\sin^2\epsilon_0} + 2\displaystyle\int_{\epsilon}^{\epsilon_0}\frac{d\epsilon}{\sin^3\epsilon}\right)},$$

$$t = \frac{l}{g\sqrt{\sin\psi}}\int_{\epsilon}^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{\sin^2\epsilon\left(\dfrac{l^2\sin\psi}{u_0^2\sin^2\delta_0\sin^2\epsilon_0} + 2\displaystyle\int_{\epsilon}^{\epsilon_0}\frac{d\epsilon}{\sin^3\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ces formules nous fournissent la vitesse sur le plan des yz, les coordonnées y, z et le temps t en fonction de l'inclinaison ϵ de la tangente à la projection de la trajectoire sur le plan des yz. L'élimination de l'angle ϵ, après l'intégration, donnerait y et z en fonction de t. La seconde intégration n'est point possible sous forme finie ; mais on ne manque pas de méthodes pour calculer numériquement les deux coordonnées du mobile, en poussant les approximations aussi loin qu'on veut.

II.

Un solide de révolution, qui a reçu une très-grande vitesse de rotation autour de son axe de figure, est lancé dans l'air. On propose de déterminer le mouvement.

Avant d'aborder la solution du problème proposé, il sera fort utile d'établir quelques notions préliminaires. Nous puiserons largement dans les admirables écrits de Poinsot, qui ont répandu une si vive lumière sur l'obscure question du mouvement de rotation.

Nous représenterons les vitesses de rotation par des droites proportionnelles, les couples par des droites proportionnelles à leurs moments et perpendiculaires à leurs plans. Ces droites, ou axes, seront dirigées de manière qu'un observateur dont les pieds seraient à l'origine de l'axe, et qui serait appuyé contre celui-ci, verrait la rotation se faire devant lui, de sa droite à sa gauche. On sait que ces droites se composent suivant la loi du parallélogramme, comme si elles représentaient des forces.

Nous disposerons toujours les axes des coordonnées de manière que la rotation de droite à gauche, autour des trois demi-axes des z, des x, des y positifs, amène l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs, l'axe des y positifs vers l'axe des z positifs, l'axe des z positifs vers l'axe des x positifs.

Ces conventions posées, nous allons considérer le mouvement autour du centre de gravité d'un corps de révolution, ou en général d'un corps quelconque doué de deux moments égaux d'inertie.

Quel que soit le mouvement d'un corps autour d'un point O, si on ne le regarde que durant un instant, il n'est autre chose qu'une simple rotation autour d'un certain axe OI passant par le point O. Cet axe change de position d'un instant à l'autre et prend pour cela le nom d'axe *instantané*. Il décrit dans l'espace une certaine surface conique ayant pour sommet le point O; et dans l'intérieur du corps, une autre surface conique de même sommet.

On a une image fidèle du mouvement du corps en concevant que le second cône, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec lui, roule sans glisser sur l'autre cône qui est fixe dans l'espace absolu.

Soit *OA* l'axe de figure du corps, et *A* le moment d'inertie autour de cet axe. Nous supposons que tous les moments d'inertie soient égaux entre eux et à *B*, autour de tous les axes menés par le point *O* perpendiculairement à l'axe *OA*. Tous ces autres axes formeront un plan que nous nommerons l'*équateur* du corps.

Soit *OG* l'axe du couple qui, en agissant pendant l'unité de temps avec la même intensité et la même direction par rapport au corps, aurait produit la rotation dont le corps est animé (*).

Si, à l'instant que l'on considère, le corps était abandonné à lui-même, l'axe instantané *OI* décrirait dans l'intérieur du corps, un cône droit et circulaire autour de l'axe *OA*; et, dans l'espace absolu, un autre cône droit et circulaire autour de l'axe *OG* qui resterait fixe: et le mouvement du corps serait exactement le même que si le premier cône *IOA*, considéré comme attaché au corps, roulait uniformément sans glisser sur la surface du cône fixe *IOG*. Tel est

---

(*) Ce couple remplace celui que Poinsot appelle *couple d'impulsion* ou *couple qui anime le corps*. De même qu'on n'admet plus, et nous pensons avec raison, dans les Traités de mécanique récents, les *forces instantanées* et les *forces accélératrices*, et que le mot *force* ne sert plus qu'à désigner une *pression* ou une *traction* qui s'évalue en unités de poids; de même, croyons-nous, on doit bannir les *couples d'impulsion* et les *couples accélérateurs*, et restreindre la signification de couple à l'ensemble de deux pressions ou tractions égales, parallèles et contraires, mais non appliquées au même point. Alors le couple d'impulsion ou de percussion est remplacé par le couple qui, en agissant avec la même direction et intensité pendant l'unité de temps, produit le mouvement dont le corps est animé. Comme l'on a donné le nom d'*accélération* à la quantité $\frac{dv}{dt}$, ainsi faut-il appeler *accélération angulaire* la quantité $\frac{d\omega}{dt}$ (v vitesse, ω vitesse angulaire, t temps).

le mouvement que suivrait le corps s'il était libre de toute action étrangère : c'est la rotation *naturelle* d'un corps qui a reçu, par des causes quelconques, une rotation autour d'un axe *OI*, et qui reste abandonné à sa propre inertie; et cette rotation simple est à la rotation quelconque d'un corps, ce que le mouvement uniforme d'un point en ligne droite est au mouvement de ce point en ligne courbe.

Mais, si le corps, au lieu d'être abandonné à lui-même, est soumis à l'action continuelle d'un couple étranger *K*, ce couple fera naître, à chaque instant *dt*, une vitesse de rotation infiniment petite $d\chi$ qui se composera avec la rotation ω du corps et fera varier continuellement l'axe et la grandeur de ω; de sorte que l'axe instantané *OI* ne décrira plus le même cône dans l'intérieur du corps, ni le même cône dans l'espace absolu.

Or, dans la question qui nous occupe, nous avons vu, dans la première partie, que l'axe du couple étranger qui sollicite le projectile et qui provient de la résistance de l'air est constamment perpendiculaire à l'axe de figure *OA*. Il n'est donc autre chose qu'un des diamètres de l'équateur et, par conséquent, un axe principal du projectile, autour duquel le moment d'inertie est *B*. Ce couple ne peut donc tendre qu'à faire tourner, à chaque instant, sur son axe *OK* lui-même, et à produire une certaine accélération angulaire

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{K}{B}.$$

Imaginons maintenant que la vitesse angulaire infiniment petite $d\chi$ vienne, à chaque instant, se composer avec la rotation finie ω que possède le corps, pour en troubler l'axe et la grandeur; il est visible que dans le parallélogramme

construit sur les deux lignes qui représenteraient ces vitesses angulaires ω et $d\chi$, la diagonale ω', qui représentera la vitesse de rotation, au bout d'un instant, donnera, si on la projette sur l'axe OA du projectile, une projection

$$\omega' \cos \widehat{I'OA}$$

parfaitement égale à la projection

$$\omega \cos \widehat{IOA}$$

que donne le côté ω de ce parallélogramme.

D'où l'on voit que si par l'accession continuelle du couple K, la rotation du mobile change à chaque instant de grandeur ω et d'inclinaison, ces variations sont telles que le produit

$$\omega \cos \widehat{IOA}$$

ne varie point.

Ainsi *la rotation du projectile, estimée autour de son axe de figure, demeure constante dans tout le cours du mouvement.*

On doit remarquer que ce théorème ne dépend ni de la loi de la résistance de l'air, ni de la forme de la section méridienne du projectile.

Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement, la rotation initiale ω_0 a lieu exactement autour de l'axe de figure du projectile, ou, autrement dit, si l'on fait abstraction du petit écart qui pourra exister à la bouche de l'arme entre l'axe de figure et l'axe de rotation du projectile, alors la vitesse angulaire de rotation du projectile, estimée autour de l'axe de figure, demeurera égale à ω_0 dans tout le cours du mouvement.

La vitesse de rotation ω_0 dont est animé le projectile, en sortant des armes rayées, est très-grande, à cause de la grande vitesse de projection u_0, à moins que l'inclinaison des hélices ne soit très-faible.

Soit p le pas de l'hélice, ou le pas du dernier élément de l'hélice à la bouche de l'arme, si l'hélice n'a pas une inclinaison constante dans toute la longueur du canon, ou, autrement dit, soit p la longueur de la portion de l'axe du canon, pour laquelle l'hélice à la bouche, prolongée, ferait un tour entier. Au sortir de l'arme, le centre de gravité O du projectile parcourra pendant un temps infiniment court dt une longueur $u_0 dt$ sur l'axe de l'arme; dans le même temps, l'arc que décrira un point du projectile situé à une distance de l'axe égale à l'unité sera à la circonférence 2π, comme $u_0 dt$ est à p, ou égal à

$$\frac{2\pi u_0 dt}{p};$$

par conséquent, en divisant par dt, on aura

$$\omega_0 = \frac{2\pi u_0}{p},$$

pour la vitesse angulaire de rotation dont le projectile se trouvera animé en sortant de l'arme, et qui aura lieu autour de l'axe de celle-ci que nous supposons coïncider avec l'axe de figure du projectile. D'après cette valeur de ω_0, le projectile fera sur lui-même, dans chaque unité de temps, un nombre de révolutions égal à

$$\frac{u_0}{p},$$

ou, autrement dit, la durée de chaque révolution aura

$$\frac{p}{u_0},$$

pour valeur.

Pour la carabine *Dixon*, on a :

$$u_0 = 377^m, \quad p = 0^m, 99.$$

Avec ces données, on trouve pour la vitesse angulaire de rotation

$$\omega_0 = 2392^m, 7,$$

qui correspond à 381 tours par seconde.

Pour le canon de campagne du calibre de $0^m,0865$, on a

$$u_0 = 370^m, \quad p = 2^m, 25,$$

donc

$$\omega_0 = 1033^m, 2,$$

ou bien 164 tours par seconde.

De ce que la vitesse angulaire autour de l'axe de figure, qui demeure constante dans tout le cours du mouvement, est une très-grande quantité, il s'ensuit que l'axe instantané *OI*, qui coïncidait à l'origine avec l'axe de figure *OA*, doit constamment s'en écarter très-peu, ou, en d'autres termes, que la distance angulaire du pôle *I* au pôle *A* est toujours très-petite.

Afin de simplifier le problème proposé, nous supposerons que l'axe instantané *OI* coïncide constamment avec l'axe de figure *OA*.

En réalité, quelque grande que puisse être la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe de figure, l'axe instantané de rotation OI n'est pas le même que l'axe OA de figure : il décrit autour de celui-ci, dans l'intérieur du corps, un très-petit cône qui roule sans glisser sur le cône qu'il décrit dans l'espace absolu. Mais ces deux axes demeurent toujours très-voisins et peuvent être regardés comme à peu près confondus en un seul, quand il ne s'agit que d'étudier les mouvements de ces axes dans l'espace absolu.

Cette hypothèse posée, voyons l'effet du couple K sur la direction de l'axe de figure du projectile. Pour cela, imaginons qu'à partir du centre de gravité O du projectile, on porte sur son axe de rotation et de figure, qui sont confondus en un seul, une ligne OI qui représente la grandeur de la vitesse angulaire de rotation ω_0, et sur une perpendiculaire à l'axe OI et à la direction de la vitesse u, une ligne infiniment petite $d\chi$ qui représente la vitesse angulaire engendrée par le couple K dans le temps infiniment petit dt. Si, sur ces deux lignes ω_0 et $d\chi$, on achève le rectangle, il est clair que la diagonale OI' sera la direction de l'axe de rotation au bout de l'instant dt. Or, l'angle $d\mu$, que cette diagonale OI' fait avec le côté OI, est évidemment égal à

$$\frac{II'}{OI},$$

et, par conséquent, on a

$$d\mu = \frac{d\chi}{\omega_0},$$

pour l'angle dont l'axe de rotation ou de figure du projectile s'incline sur lui-même en un instant dt.

Si l'on projette cet angle sur un plan perpendiculaire à la direction de la vitesse u, et qu'on désigne sa projection par $d\nu$, on aura

$$d\nu = \frac{II'}{OI \sin \delta} = \frac{d\chi}{\omega_0 \sin \delta},$$

car II' est parallèle à ce plan, et δ est l'angle que fait OI avec la direction de u. C'est l'expression de l'angle infiniment petit que décrit en un instant dt la projection de l'axe du projectile sur le plan normal à la trajectoire. Donc, si l'on considère la vitesse angulaire avec laquelle la projection de l'axe de figure tourne sur le plan normal, ou, si l'on veut, la vitesse angulaire du pôle du projectile autour de la tangente à la trajectoire, on aura pour cette vitesse angulaire

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{1}{\omega_0 \sin \delta} \frac{d\chi}{dt};$$

ou bien, en mettant dans cette expression, au lieu de $\frac{d\chi}{dt}$, sa valeur trouvée précédemment, on aura

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{K}{B\omega_0 \sin \delta},$$

pour la vitesse angulaire du pôle du projectile autour de la tangente à la trajectoire (*).

(*) Cette expression de la vitesse angulaire du pôle du projectile n'est pas complète, car ayant supposé l'axe instantané de rotation et l'axe de figure confondus en un seul, on a implicitement supposé nul le couple provenant des forces centrifuges des différentes particules du projectile. Or, comme en réalité l'axe instantané est distinct de l'axe de figure, le couple dû aux forces centrifuges n'est pas nul et, à la rigueur, il faut en tenir compte. Voici comment on peut le faire :

Cette vitesse angulaire étant en raison inverse de la vitesse angulaire de rotation constante ω_0, il s'ensuit qu'elle est en général très-petite, car celle-ci est dans notre cas très-grande.

Le sens de ce mouvement conique de l'axe de figure du

Si l'on désigne par A le moment d'inertie du projectile autour de l'axe de figure; par ω_0 la vitesse de rotation autour de l'axe de figure; par ω_1, ω_2 les vitesses de rotation autour de deux axes rectangulaires compris dans l'équateur du projectile, le couple provenant des forces centrifuges sera exprimé par

$$(A - B)\,\omega_0 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (*).$$

L'axe de ce couple est dans la même ligne que l'axe du couple K provenant de la résistance du milieu, mais le sens en est contraire. Il s'ensuit que dans l'expression de la vitesse angulaire

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{K}{B\omega_0 \sin\delta},$$

il faut remplacer K par

$$K - (A - B)\,\omega_0 \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

On aura donc

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{K}{B\omega_0 \sin\delta} - \frac{(A-B)\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}{B \sin\delta},$$

pour la vitesse angulaire de la rotation qui vient de la résistance et des forces centrifuges.

Maintenant

$$\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$$

exprime la composante de la vitesse angulaire du projectile autour d'un diamètre de l'équateur. On voit, d'autre part, que la vitesse angulaire autour de la ligne de l'axe des deux couples est égale à $\frac{d\delta}{dt}$, et que la vitesse angulaire autour de la

---

(*) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*. Paris, 1852, p. 91.

projectile autour de l'élément de la courbe que décrit son centre de gravité, dépend du sens du couple K. Toutes les fois que le couple K tend à *éloigner* l'axe de figure du projectile de la tangente, ou, ce qui revient au même, à *relever* le plan de l'équateur du projectile sur le plan normal

---

tangente fixe est égale à $\frac{d\nu}{dt}$. La projection de cette dernière sur le plan de l'équateur est perpendiculaire à la ligne des deux couples, et est égale à

$$\sin\delta\,\frac{d\nu}{dt}.$$

La résultante de ces deux vitesses

$$\frac{d\delta}{dt} \qquad \text{et} \qquad \sin\delta\,\frac{d\nu}{dt},$$

qui sont comprises dans le plan de l'équateur, et sont perpendiculaires entre elles, est égale à

$$\sqrt{\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2+\sin^2\delta\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2}.$$

Cette vitesse autour d'un diamètre de l'équateur doit être égale à la vitesse trouvée ci-dessus. On aura donc

$$\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}=\sqrt{\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2+\sin^2\delta\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2}.$$

L'angle δ que fait l'axe de figure du projectile avec la tangente est à peu près constant; de manière qu'on peut, sans erreur sensible, négliger $\frac{d\delta}{dt}$. On aura, en conséquence, très-approximativement

$$\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}=\sin\delta\,\frac{d\nu}{dt}.$$

En substituant cette valeur, on obtient

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{K}{B\omega_0\sin\delta}-\frac{(A-B)}{B}\frac{d\nu}{dt};$$

d'où l'on tire enfin

$$\frac{d\nu}{dt}=\frac{K}{A\omega_0\sin\delta}.$$

On arrive à la même expression, à l'aide des équations d'Euler, en négligeant le carré et les puissances supérieures de l'amplitude des oscillations de l'axe de figure, comme je le fais voir plus loin. Mais, il me semble, qu'on se forme une idée bien plus claire du mouvement, par la méthode que j'ai suivie, et qui a été introduite dans la science par Poinsot. *(Note de 1872).*

à la trajectoire, il est visible que le mouvement angulaire du pôle du projectile autour de la tangente à la trajectoire se fait dans le même sens que la rotation du projectile estimée autour de la même tangente, sens de mouvement qu'on prend pour terme de comparaison, et qu'on appelle le sens *direct*, de sorte que dans ce premier cas, le mouvement de l'axe de figure autour de la tangente est *direct*.

Au contraire, le mouvement est *rétrograde* ou se fait en sens opposé à celui de la rotation ω_0, toutes les fois que le couple K tend à *rapprocher* l'axe de figure du projectile de la tangente à la trajectoire, ou, ce qui revient au même, à *coucher* l'équateur du projectile sur le plan normal à la trajectoire.

Dans la question qui nous occupe, le sens du couple K dépend évidemment de la position, par rapport au centre de gravité, du point où la résistance de l'air vient couper l'axe de figure du projectile.

Pour abréger le discours, nous appellerons dorénavant *centre de résistance* le point de l'axe de figure du projectile par lequel passe la résultante de toutes les pressions exercées sur la surface du projectile, par l'action de l'air, quelle que soit la position du projectile.

Si le centre de résistance se trouve devant le centre de gravité, c'est-à-dire plus près de la partie antérieure que celui-ci, le couple K tendra à éloigner l'axe du projectile de la tangente, de sorte que le mouvement conique de l'axe de figure autour de la tangente sera *direct*.

Si le centre de résistance est derrière le centre de gravité, c'est-à-dire plus près de la partie postérieure du projectile que celui-ci, le couple K tendra à rapprocher l'axe de figure du projectile de la tangente à la trajectoire, de sorte que le mouvement conique sera *rétrograde*.

D'après tout ce qui précède, l'idée qu'on doit se faire du mouvement d'un projectile lancé par une arme rayée est la suivante :

Tandis que le centre de gravité du projectile parcourt la trajectoire, celui-ci tourne uniformément sur son axe de figure, qui reste immobile dans son intérieur et qui tourne lentement dans l'espace autour de la tangente à la trajectoire (*).

Ce mouvement conique de l'axe du projectile, autour de la tangente à la trajectoire que décrit son centre de gravité, est analogue à ce mouvement de l'axe de la terre, autour de l'axe de l'écliptique, qui fait la *précession des équinoxes*. Notre couple K, provenant de la résistance de l'air, est remplacé, dans le cas de la terre, par un couple provenant de l'attraction du soleil et de la lune sur les différentes parties du sphéroïde terrestre, transportée au

---

(*) Cette idée d'un axe fixe, dans le projectile, tournant autour de la tangente, n'est pas tout à fait parfaite. En réalité, comme nous l'avons déjà marqué plus haut, l'axe de rotation du projectile n'est point fixe dans l'intérieur, ni ne coïncide avec l'axe de figure. La rotation se fait autour d'un axe instantané qui décrit, dans l'intérieur du projectile, un cône autour de l'axe de figure, et, dans l'espace absolu, un autre cône autour de la tangente. En toute rigueur, le mouvement du projectile est le même que si le premier cône, considéré comme attaché au projectile et l'entraînant avec lui, roulait, sans glisser, sur la surface du second cône qui resterait fixe dans l'espace absolu.

Telle est l'idée parfaitement exacte qu'on doit se faire du mouvement du projectile autour de son centre de gravité. A la vérité l'ouverture du cône décrit dans l'intérieur du projectile, est fort petite ; mais ce petit cône n'en existe pas moins, sans quoi il n'y aurait plus de mouvement conique de l'axe de figure.

Le cône autour de la tangente n'est pas exactement droit et circulaire, mais sa base est une espèce de courbe circulaire qui serpente autour du centre ; de sorte que l'axe de figure du projectile s'éloigne et se rapproche alternativement de la tangente. C'est à ce petit mouvement d'oscillation de l'axe de figure qu'on a donné le nom de *nutation*.

Si l'on fait abstraction de ce petit mouvement d'oscillation, on pourra regarder le cône ayant pour axe la tangente comme étant droit et circulaire ; et alors on pourra conclure que le petit cône décrit dans l'intérieur du projectile est aussi droit et circulaire. *(Note de 1872).*

centre de gravité de celui-ci ; couple qui tend toujours à coucher l'équateur terrestre sur le plan de l'écliptique. En vertu de ce couple, pendant que la terre tourne en un jour sur son axe de figure, cet axe tourne lui-même en sens contraire autour de l'axe de l'écliptique sur lequel il est incliné de 23°, 27′ environ, et avec une vitesse angulaire telle qu'il accomplit une révolution dans un temps de 25 à 26 mille ans.

Il ne faudrait pourtant point pousser trop loin cette comparaison entre le mouvement conique de l'axe du projectile et le mouvement conique de l'axe de la terre qui produit la précession des équinoxes, car dans celui-ci, le mouvement est uniforme et l'ouverture du cône décrit se conserve constante et égale à 47° à peu près, tandis que dans celui-là le mouvement est variable et l'ouverture du cône change sans cesse.

Le mouvement conique de l'axe de figure du projectile nous explique la cause des déviations permanentes observées dans le tir des armes à feu rayées.

Il est d'abord clair qu'à cause de la rotation de l'axe de figure du projectile autour de la tangente à la trajectoire, le projectile vient se présenter de travers à l'action de l'air, et doit, par conséquent, être dévié de côté.

Dans le cas ordinaire des armes rayées, la rotation a lieu de droite à gauche autour de l'axe du projectile dirigé vers la partie antérieure (selon les conventions posées plus haut).

Alors, si le centre de résistance est placé devant le centre de gravité, l'axe commencera par s'incliner vers la droite de la trajectoire, de telle sorte que le projectile se présentera de flanc à la résistance de l'air, et sera par suite dévié à droite. Si, au contraire, le centre de résistance est placé derrière le centre de gravité, l'axe s'inclinera d'abord

vers la gauche, et la déviation aura lieu à gauche. Il est inutile d'ajouter que la déviation serait nulle, si le centre de résistance tombait sur le centre de gravité.

Dans le cas de la rotation de gauche à droite autour de l'axe dirigé vers la partie antérieure du projectile, ou, ce qui revient au même, de la rotation de droite à gauche autour de l'axe dirigé vers la partie postérieure, la déviation sera à gauche ou à droite, suivant que le centre de résistance tombera devant ou derrière le centre de gravité.

On doit remarquer, au reste, qu'après une demi révolution de l'axe du projectile autour de la tangente à la trajectoire, la pointe du projectile passera de l'autre côté du plan vertical contenant la tangente, et par là la déviation changera de direction par rapport au dernier élément de la trajectoire. Mais comme ce dernier élément est incliné sur le plan vertical de tir, la déviation par rapport à ce plan continuera d'augmenter.

La déviation permanente observée dans le tir des armes à feu rayées a reçu en France le nom de *dérivation*.

On a cru, d'abord, voir la cause de ce phénomène dans le frottement de l'air condensé sur la partie inférieure du projectile; mais cette explication, quoique assez plausible au premier abord, ne supporte pas un examen approfondi. Dans la note B nous avons essayé de la réfuter à l'aide de l'examen des résultats d'expériences de tir.

M. Magnus, savant physicien de Berlin, a eu le premier l'idée heureuse de chercher la cause de ce phénomène dans le mouvement latéral de l'axe de figure du projectile, mouvement produit par la résistance de l'air appliquée à un point autre que le centre de gravité. A l'aide d'ingénieux appareils, il a reproduit non-seulement la dérivation des projectiles oblongs, mais encore les déviations dues au

mouvement de rotation des projectiles sphériques qu'on faisait dépendre aussi du frottement de l'air condensé.

Après ces irrécusables expériences, publiées en 1852, on ne saurait hésiter à abandonner désormais l'ancienne explication qui attribuait tous ces phénomènes au frottement de l'air.

On pourrait se demander comment il se fait que la dérivation observée dans la pratique ait toujours lieu du côté vers lequel tourne la partie supérieure du projectile, quoiqu'on cherche, en général, à porter le centre de gravité des projectiles aussi près de la pointe qu'il est possible. Pour nous expliquer la constance du sens de la dérivation, il faut remarquer qu'à cause de la forme conique ou ovoïde de la partie antérieure du projectile et de la forme cylindrique du corps, il arrive qu'au commencement du mouvement, lorsque l'angle que forme l'axe de figure du projectile avec l'élément de la trajectoire du centre de gravité est encore très-petit, le centre de résistance du projectile entier est fort près du centre de résistance de la partie conique ou ovoïde. En effet, comme on peut le voir dans la note C, la résistance normale à l'axe de figure sur la partie cylindrique est proportionnelle à

$$\sin^2 \delta ,$$

tandis que la résistance sur la partie conique ou ovoïde, pour des angles δ très-petits, est proportionnelle à

$$\sin \delta \cos \delta ;$$

de telle sorte que ces deux résistances normales peuvent se représenter par

$$m \sin^2 \delta \quad \text{et} \quad n \sin \delta \cos \delta ,$$

où m et n dépendent des dimensions du projectile. La première est appliquée au milieu de la partie cylindrique, la seconde, au centre de résistance de la partie antérieure. Si l'on désigne par a la distance entre ces deux centres de résistance, on aura pour la distance du centre de résistance de la partie conique ou ovoïde au centre de résistance du projectile entier l'expression

$$\frac{a \operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} \delta + \frac{n}{m}}.$$

On voit par là que tant que δ est petit, cette distance est très-petite.

Il s'ensuit qu'à moins de faire coïncider le centre de gravité du projectile avec le centre de résistance de la partie antérieure, ou de la porter en avant de ce point, il arrivera toujours qu'au commencement du mouvement, le centre de résistance du projectile entier tombera devant le centre de gravité, et par conséquent, que la dérivation commencera à se faire du côté vers lequel tourne la partie supérieure du projectile.

A mesure que l'inclinaison de l'axe de figure sur la tangente à la trajectoire augmentera, le centre de résistance se rapprochera du centre de gravité; il pourra même l'atteindre et passer de l'autre côté, pour certaines formes de projectiles : alors la dérivation pourra changer de sens. Mais il paraît qu'avec les formes ordinaires qu'on donne aux projectiles, cet effet ne se produit pas, ou que, s'il se produit, il n'a pas le temps de compenser la dérivation qui a déjà eu lieu d'un côté.

L'image que nous avons donnée du mouvement du projectile, va nous permettre de calculer par points sa

trajectoire, c'est-à-dire, de déterminer, à chaque instant, la position de son centre de gravité ainsi que la direction de son axe de figure.

Pendant un temps très-court, on peut supposer que l'axe du projectile se conserve parallèle à lui-même, et n'avoir égard, pendant ce temps très-court, qu'au mouvement de translation. On supposera ensuite qu'au bout de ce temps, l'axe du projectile tourne instantanément, autour de la tangente à la trajectoire, de la quantité angulaire relative à ce temps. En procédant de cette manière de proche en proche, à partir de l'origine, on aura, dans chaque point de sa course, la position du centre de gravité et la direction de l'axe du projectile.

Soit O' la position du centre de gravité du projectile au bout du temps t; $O'x'$ la position de l'axe de figure. Concevons par cet axe un plan vertical et dans ce plan une perpendiculaire $O'y'$ à l'axe de figure, qui soit dirigée de haut en bas. Tirons un axe $O'z'$ horizontal et dirigé vers la gauche de la trajectoire.

Soit φ l'angle que fait l'axe $O'x'$ avec la verticale; θ l'angle que fait l'axe $O'z'$ avec l'axe fixe Oz. Ces trois axes des coordonnées $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, qui ne sont qu'instantanés, seront complétement définis, par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz, au moyen des angles φ et θ.

Nous désignerons par δ l'angle que fait la direction de la vitesse u du centre de gravité avec l'axe $O'x'$, et ϵ l'angle que sa projection sur le plan des $y'z'$ fait avec l'axe $O'y'$.

Cela étant, si nous supposons que pendant le temps très-court Δt, le couple K n'agisse point, les formules données au § 1er nous fourniront les accroissements

$$\Delta (u \cos \delta), \quad \Delta (u \sin \delta)$$

des projections de la vitesse sur l'axe de figure et sur le plan de l'équateur, ainsi que les accroissements

$$\Delta\delta, \quad \Delta\epsilon$$

des angles δ et ϵ, et les valeurs de

$$\Delta x', \quad \Delta y', \quad \Delta z'.$$

En projetant celles-ci sur les axes fixes des coordonnées, on aura les accroissements

$$\Delta x, \quad \Delta y, \quad \Delta z$$

des coordonnées de la trajectoire par rapport aux axes fixes.

Si nous désignons par α, α', α'' les cosinus des angles que forme $O'x'$ avec les axes fixes Ox, Oy, Oz; par β, β', β'' les cosinus des angles que forme $O'y'$ avec les axes fixes; par γ, γ', γ'' les cosinus des angles que forme $O'z'$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\Delta x &= \alpha\,\Delta x' + \beta\,\Delta y' + \gamma\,\Delta z', \\
\Delta y &= \alpha'\Delta x' + \beta'\Delta y' + \gamma'\Delta z', \\
\Delta z &= \alpha''\Delta x' + \beta''\Delta y' + \gamma''\Delta z'.
\end{aligned}$$

On sait d'ailleurs, par les formules connues d'Euler, pour la transformation des coordonnées, que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi, \\
\beta &= \cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi, \\
\gamma &= \sin\theta \sin\psi, \\
\alpha' &= \cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi, \\
\beta' &= \cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi, \\
\gamma' &= \sin\theta \cos\psi, \\
\alpha'' &= -\sin\theta \sin\varphi, \\
\beta'' &= -\sin\theta \cos\varphi, \\
\gamma'' &= \cos\theta.
\end{aligned}$$

Avant de calculer l'élément suivant de la trajectoire, il faudra incliner instantanément l'axe de figure de la quantité due à l'action du couple K pendant le temps Δt. Concevons qu'après ce mouvement on mène de la même manière qu'auparavant trois nouveaux axes $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$. Pour trouver les variations que subissent les angles ϵ, φ, θ en passant des axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, aux axes $O''x''$, $O''y''$, $O''z''$, décomposons la vitesse de rotation

$$\frac{dv}{dt},$$

autour de la tangente à la trajectoire, en trois autres vitesses de rotation autour des axes $O'x'$, $O'z'$ et de la verticale ; il est clair que la première sera égale à

$$\frac{d\epsilon}{dt},$$

la seconde à

$$\frac{d\varphi}{dt},$$

et la troisième à

$$\frac{d\theta}{dt}.$$

Pour exécuter cette décomposition, commençons par projeter

$$\frac{dv}{dt}$$

sur les trois axes orthogonaux $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$; ensuite,

décomposons la projection sur $O'y'$ en deux composantes suivant $O'x'$ et la verticale.

Nous aurons ainsi

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\cos\delta + \frac{d\nu}{dt}\sin\delta\cos\epsilon\cot\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\sin\delta\sin\epsilon,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\nu}{dt}\sin\delta\cos\epsilon\,\mathrm{coséc}\,\varphi.$$

En ayant égard à la valeur de

$$\frac{d\nu}{dt},$$

il vient

$$\Delta\epsilon = \frac{K}{A\omega}(\cot\delta + \cos\epsilon\cot\varphi)\,\Delta t,$$

$$\Delta\varphi = \frac{K}{A\omega}\sin\epsilon\,\Delta t,$$

$$\Delta\theta = \frac{K}{A\omega}\cos\epsilon\,\mathrm{coséc}\,\varphi\,\Delta t.$$

A l'aide de ces expressions, après y avoir remplacé K par sa valeur en fonction de δ, on aura les nouvelles valeurs de ϵ, φ, θ, pour calculer un second élément de la trajectoire, par le moyen des formules du § 1er. Et ainsi de suite.

On pourrait, au moyen des mêmes idées, écrire les équations différentielles du mouvement du projectile qui seraient au nombre de six, dont trois pour le mouvement de translation et trois pour celui de rotation ; mais, comme l'on ne saurait espérer de les intégrer en termes finis, le plus sûr moyen de calculer la trajectoire est de la partager en un assez grand nombre de portions et d'en calculer chacune à part ; car alors on n'aura qu'à rassembler les calculs de toutes ces portions. C'est, du reste, ce qu'on est obligé de faire, lorsqu'on veut calculer la trajectoire que décrivent les projectiles sphériques.

Ce calcul par parties fera connaître, à un instant quelconque, la position du projectile dans l'espace, au moyen des trois coordonnées rectilignes x, y, z, de son centre de gravité, et des deux coordonnées angulaires de son pôle, savoir la *hauteur* $90° - \varphi$ et l'*azimut* θ.

Il importe de remarquer que ce calcul de la trajectoire par parties s'applique aux projectiles de l'artillerie, quelle que soit leur forme, aussi bien qu'au projectile cylindrique que nous avons considéré pour simplifier la question. En effet, nous avons vu que la résistance éprouvée par le cylindre de la part de l'air étant transportée au centre de gravité, donne naissance aux deux forces

$$mg\frac{u^2}{k^2}\cos^2\delta, \qquad mg\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta$$

dirigées, l'une suivant l'axe de figure, l'autre suivant une perpendiculaire à celui-ci ; et au couple

$$mgD\frac{u^2}{l^2}\sin^2\delta.$$

Or, dans le cas d'un projectile dont la proue est conique ou ovoïde, ces forces et ce couple seront représentés par des fonctions de δ d'une autre forme. Le couple pourra même changer de signe pour certaines valeurs de l'angle δ. De sorte que si l'on veut conserver à ces fonctions la forme qu'elles ont dans le cas du cylindre, il faudra regarder les quantités k, l, D, comme des variables qui seraient des fonctions de δ.

Mais il sera toujours permis de regarder, pour un temps très-court, ces dernières quantités comme des constantes, et de les faire varier seulement en passant d'un élément de la trajectoire à un autre.

La même méthode s'applique pareillement au cas où l'on voudrait employer une autre loi de la résistance en fonction de la vitesse que la loi ordinaire due à Newton ; il suffirait pour cela de faire varier suivant la vitesse, d'un élément de la trajectoire à l'autre, les coefficients k, l, D.

On pourra ainsi calculer la trajectoire par parties, quelles que soient la forme de la section méridienne du projectile et la loi de la résistance en fonction de la vitesse.

Nous gardons pour une autre partie de ces études le calcul numérique d'un exemple particulier de trajectoire (*).

(*) Ces études n'ayant pas été continuées, l'exemple numérique n'a pas été calculé. Nous renvoyons le lecteur qui désirerait se faire une idée de la forme de la trajectoire décrite par les projectiles oblongs aux mémoires de M. Mayevski, que nous avons déjà cités et qui sont insérés dans les recueils suivants : *Bulletin de l'Acad. des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. 8, 1865 ; *Revue de Technologie militaire*, t. 5. Liége, 1865.

NOTE A.

Le problème du mouvement de rotation des projectiles oblongs a une très-grande analogie avec le problème du mouvement d'un corps de révolution pesant autour d'un point fixe situé sur l'axe de figure. Ce second problème a été résolu, pour la première fois, par Lagrange dans la *Mécanique analytique*, II^e^ partie, section IX, 35; et postérieurement par Poisson dans le XVI^e^ cahier du *Journal de l'Ecole polytechnique* (1813) et dans son *Traité de mécanique*, t. II, p. 162 (1833).

Voici comment on peut déterminer la vitesse angulaire du pôle du projectile autour de la tangente à la trajectoire à l'aide d'une analyse analogue à celle de Poisson.

Soient ω_0, ω_1, ω_2 les vitesses angulaires du projectile autour des axes correspondants aux moments d'inertie A, B, C. Le moment A correspond à l'axe de figure et l'on suppose $B = C$.

Soient, en outre, δ l'angle que fait l'axe de figure avec la tangente à la trajectoire que l'on suppose fixe dans l'espace; ν l'angle dièdre que fait le plan contenant la tangente et l'axe de figure avec le plan vertical mené par la tangente; η l'angle dièdre que fait le plan contenant la tangente et l'axe de figure avec le plan vertical mené par l'axe de figure. Dans le langage de l'astronomie, l'angle δ prend le nom d'*obliquité*, et $\frac{d\delta}{dt}$ est la vitesse du mouvement de *nutation;* $\frac{d\nu}{dt}$ est la vitesse du mouvement de *précession;* η est l'*ascension droite*. L'intersection de l'équateur du projectile et du plan perpendiculaire à la

tangente s'appelle la ligne des *nœuds;* la vitesse avec laquelle cette ligne se meut sur le plan perpendiculaire à la tangente est exprimée par $\frac{d\nu}{dt}$, et se nomme la vitesse du mouvement de *précession*.

On sait que les angles δ, ν, η sont liés avec les vitesses angulaires ω_0, ω_1, ω_2 par les équations

$$\omega_0 = -\frac{d\eta}{dt} + \cos\delta\,\frac{d\nu}{dt},$$

$$\omega_1 = \cos\eta\,\frac{d\delta}{dt} - \sin\eta\sin\delta\,\frac{d\nu}{dt},$$

$$\omega_2 = -\sin\eta\,\frac{d\delta}{dt} - \cos\eta\sin\delta\,\frac{d\nu}{dt};$$

d'où l'on tire

$$[1]\quad\begin{cases} \omega_1\cos\eta - \omega_2\sin\eta = \dfrac{d\delta}{dt}, \\ \omega_1\sin\eta + \omega_2\cos\eta = -\sin\delta\,\dfrac{d\nu}{dt}, \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 = \left(\dfrac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2\delta\left(\dfrac{d\nu}{dt}\right)^2, \\ \dfrac{d\omega_1}{dt}\sin\eta + \dfrac{d\omega_2}{dt}\cos\eta = \omega_0\dfrac{d\delta}{dt} - 2\cos\delta\dfrac{d\delta}{dt}\dfrac{d\nu}{dt} - \sin\delta\dfrac{d^2\nu}{dt^2}. \end{cases}$$

Le seul couple étranger qui sollicite le projectile est celui qui provient de la résistance de l'air, dont l'axe est dirigé

suivant la ligne des nœuds. Les composantes de ce couple K, suivant les deux axes équatoriaux, seront

$$K\cos\eta \quad \text{et} \quad -K\sin\eta.$$

Dans ce cas, les équations du mouvement de rotation seront

$$A\frac{d\omega_0}{dt}=0,$$

$$B\frac{d\omega_1}{dt}=(A-B)\,\omega_0\omega_2+K\cos\eta,$$

$$B\frac{d\omega_2}{dt}=(B-A)\,\omega_0\omega_1-K\sin\eta.$$

La première équation nous montre que ω_0 est constant, c'est-à-dire que le mouvement de rotation du projectile est uniforme, parallèlement à son équateur.

On peut obtenir deux intégrales premières des deux autres équations. D'abord, en les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par ω_1, ω_2, on trouve

$$B\left(\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}\right)=K(\omega_1\cos\eta-\omega_2\sin\eta),$$

ou bien, en vertu des équations [1],

$$B\left(\omega_1\frac{d\omega_1}{dt}+\omega_2\frac{d\omega_2}{dt}\right)=K\frac{d\delta}{dt}.$$

En intégrant et désignant par δ_0 la valeur initiale de δ, il en résulte

$$B(\omega_1^2+\omega_2^2)=2K(\delta-\delta_0).$$

D'après les équations [1] on aura

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \sin^2\delta \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{2K}{B}(\delta - \delta_0).$$

Pour avoir une autre intégrale des mêmes équations, qu'on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par *sin* η et *cos* η; ce qui donne

$$B\left(\frac{d\omega_1}{dt}\sin\eta + \frac{d\omega_2}{dt}\cos\eta\right) = (A - B)\,\omega_0\,(\omega_2 \sin\eta - \omega_1 \cos\eta),$$

ou bien, à cause des équations [1],

$$B\sin\delta\,\frac{d^2v}{dt^2} + 2B\cos\delta\,\frac{d\delta}{dt}\frac{dv}{dt} - A\omega_0\frac{d\delta}{dt} = 0.$$

On voit aisément que le facteur *sin* δ rend le premier membre de cette équation une différentielle exacte. On obtient, d'après cela,

$$B\sin^2\delta\,\frac{dv}{dt} + A\omega_0\cos\delta = \text{const.}$$

En déterminant la constante de manière qu'à l'origine du mouvement on ait

$$\delta = \delta_0 \quad , \quad \frac{dv}{dt} = 0 \ ,$$

il vient

$$B\sin^2\delta\,\frac{dv}{dt} = A\,\omega_0\,(\cos\delta_0 - \cos\delta);$$

d'où l'on tire pour la vitesse angulaire du mouvement de précession

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{A\omega_0}{B}\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin^2\delta}\right).$$

En introduisant cette valeur dans l'intégrale trouvée plus haut, il vient

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right)^2 + \frac{A^2\omega_0^2}{B^2}\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin\delta}\right)^2 = \frac{2k}{B}(\delta - \delta_0).$$

Supposons actuellement que l'angle δ demeure à peu près constant, et par conséquent très-peu différent de δ_0, pendant toute la durée du mouvement. Faisons donc

$$\delta = \delta_0 + u, \quad d\delta = du\,;$$

et considérons u comme une variable très-petite. En négligeant les puissances de u supérieures au carré, on aura

$$\left(\frac{\cos\delta_0 - \cos\delta}{\sin\delta}\right)^2 = u^2;$$

à ce degré d'approximation, l'équation ci-dessus donne

$$\frac{du^2}{dt^2} + \frac{A^2\omega_0^2}{B^2}u^2 = \frac{2K}{B}u\,;$$

d'où l'on tire

$$dt = \frac{B\,du}{\sqrt{2BKu - A^2\omega_0^2u^2}}.$$

En intégrant et observant que $u = 0$ quand $t = 0$, il vient

$$t = \frac{B}{A\omega_0} \arccos\left(1 - \frac{A^2\omega_0^2}{BK}u\right),$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{BK}{A^2\omega_0^2}\left(1 - \cos\frac{A\omega_0}{B}t\right).$$

Pour que la variable u soit toujours très-petite, comme nous l'avons supposé, il faudra que la quantité ω_0 soit très-grande; ce qui exige, en général, qu'on ait imprimé au projectile une très-grande vitesse de rotation autour de son axe de figure.

En introduisant cette valeur de u dans l'expression de $\frac{dv}{dt}$, laquelle devient, pour u très-petit, en négligeant le carré de u,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{A\omega_0}{B}\frac{u}{\sin\delta_0},$$

on obtient

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{A\omega_0\sin\delta_0}\left(1 - \cos\frac{A\omega_0}{B}t\right).$$

La quantité entre parenthèses varie périodiquement entre 0 et 2; de sorte que la vitesse de la précession est nulle quand $\delta = \delta_0$, atteint un maximum égal à

$$\frac{2K}{A\omega_0\sin\delta_0},$$

quand

$$\delta = \delta_0 + \frac{BK}{A^2\omega_0^2};$$

après quoi elle diminue et s'évanouit de nouveau quand $\delta = \delta_0$; et elle continue ainsi à osciller périodiquement.

En intégrant, il vient

$$\nu = \frac{Kt}{A\omega_0 \sin\delta_0} - \frac{BK}{A^2\omega_0^2 \sin\delta_0} \sin\frac{A\omega}{B}t.$$

Si ω_0 est très-grand, le second terme est très-petit par rapport au premier; de sorte que l'angle de la précession peut être calculé approximativement par le premier terme; c'est-à-dire qu'on peut prendre, pour la vitesse angulaire du mouvement de précession, la valeur

$$\frac{K}{A\omega_0 \sin\delta_0}.$$

De tout ce qui précède, on conclut que lorsque le projectile a reçu une très-grande vitesse de rotation autour de son axe de figure, la vitesse de la précession est très-petite et a une valeur moyenne égale à

$$\frac{K}{A\omega_0 \sin\delta_0};$$

et de plus, que les oscillations de l'axe de figure dues à la nutation, sont très-petites, de sorte qu'il conserve une inclinaison à peu près constante, par rapport à la tangente, pendant tout le temps qu'on suppose celle-ci fixe.

(Cette note a été ajoutée en 1872).

NOTE B.

RÉFUTATION DE LA THÉORIE QUI FAIT DÉPENDRE LA DÉRIVATION DU FROTTEMENT DE L'AIR.

Le tir du canon de 16 centimètres, rayé au pas de $3^m,77$, a donné les résultats suivants :

Durée du trajet du projectile : secondes	4	8	12	20	24.
Dérivation à droite du plan de tir : mètres	6,31	28,81	64,07	145,22	223,38.

En examinant ces nombres, on ne tarde point à s'apercevoir que les dérivations sont à peu près proportionnelles aux carrés des durées du trajet. Cette relation approximative entre les dérivations et les durées a été signalée dès les premiers temps qu'on a remarqué le phénomène de la dérivation dans le tir des armes à feu carabinées.

Il en résulte que la force qui produit la dérivation, qu'on peut appeler *force dérivatrice*, a approximativement une valeur constante, quelle qu'en soit l'origine.

En divisant les dérivations ci-dessus par les carrés des temps correspondants, on obtient les nombres suivants :

Rapport de la dérivation au carré du temps :	0,39	0,45	0,44	0,36	0,39,

dont la moyenne est

0,41.

En désignant par z la dérivation, par t le temps, nous avons donc, dans notre exemple,

$$\frac{z}{t^2} = 0{,}41.$$

Si l'on admet que, depuis l'instant du départ du projectile, jusqu'à celui où la dérivation produite est z, la force dérivatrice F ait été constante, on aura

$$F = 2m\frac{z}{t^2},$$

m étant la masse du projectile.

Avec le canon de 16 centimètres rayé, nous avons

$$mg = 30^k,$$

donc

$$F = \frac{60}{g}\frac{z}{t^2} = (6{,}119)\frac{z}{t^2}.$$

En remplaçant $\frac{z}{t^2}$ par sa valeur trouvée ci-dessus, il vient

$$F = 2^k{,}48$$

pour la valeur de la force constante qui produit la dérivation.

D'après l'explication qu'on donne ordinairement de la cause de la dérivation, cette force F proviendrait du frottement de l'air contre la partie inférieure du projectile, et serait appliquée perpendiculairement à la génératrice inférieure du projectile.

Si la force F est engendrée par le frottement de l'air, comme elle est à peu près constante, il faudra que la vitesse angulaire de rotation du projectile soit aussi à peu près constante, car on sait que le frottement d'un fluide contre un solide est proportionnel à la vitesse relative de ces deux corps.

On pourrait ne pas avoir une confiance entière dans cette loi du frottement d'un fluide contre un solide; mais il est hors de doute que ce frottement croît avec la vitesse, de telle sorte que la force F ne peut être constante, si la vitesse angulaire de rotation n'est pas constante aussi.

Or, la vitesse angulaire de rotation ne peut pas être constante, car la force F appliquée à la périphérie du projectile, doit forcément la diminuer.

Soit ω la vitesse angulaire de rotation, $2R$ le calibre du projectile, A son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation, on a

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{RF}{A},$$

d'où l'on tire

$$\omega = \omega_0 - \frac{RF}{A}t,$$

ω_0 étant la vitesse angulaire initiale.

Si n est le nombre des tours faits par le projectile en une seconde, on a

$$\omega = 2\pi n;$$

donc

$$n = n_0 - \frac{RF}{2\pi A}t.$$

Supposons que le projectile soit cylindrique, on aura le moment d'inertie,

$$A = \frac{1}{2} m R^2 ;$$

donc

$$n = n_0 - \frac{F}{\pi m R} t.$$

Nous avons, dans l'exemple qui nous occupe,

$$F = 2^k,48, \qquad m = \frac{30^k}{g}, \qquad 2R = 0^m,16.$$

En substituant ces valeurs numériques dans la formule précédente, il vient

$$n = n_0 - (3,225)\, t.$$

Si nous supposons la vitesse initiale du projectile de 310 mètres par seconde, les hélices du canon faisant un tour entier sur une longueur de $3^m,77$, il s'ensuit que le projectile, en sortant du canon, fait sur lui-même, en une seconde, un nombre de révolutions

$$n_0 = \frac{310}{3,77} = 82.$$

En substituant cette valeur dans l'expression de n, on obtient

$$n = 82 - (3,225)\, t.$$

Pour

$$t = 24'',$$

on aura

$$n = 5.$$

C'est-à-dire la vitesse de rotation serait réduite à 5 tours par seconde après 24″, temps qui correspond à la portée de 5000 mètres.

On voit par là de combien serait diminuée la vitesse de rotation par le frottement de l'air, s'il avait la valeur qu'on doit lui supposer pour lui faire produire la dérivation.

Puisque la vitesse de rotation diminue sans cesse, il faut que le frottement diminue aussi, de sorte que la force dérivatrice ne peut pas se conserver constante.

Les mêmes personnes qui attribuent au frottement de l'air la dérivation, admettent que la vitesse de rotation des projectiles ne diminue que fort lentement dans tout le cours du mouvement; mais elles ne réfléchissent pas que pour produire les dérivations notables qu'on observe, il faut une force d'une certaine grandeur, qui, appliquée tangentiellement au projectile, ne peut qu'en ralentir considérablement la vitesse de rotation.

Le résultat des considérations que nous venons d'exposer est qu'il faut chercher ailleurs que dans le frottement de l'air la cause de la dérivation (*).

(*) Si le frottement de l'air, sur la partie inférieure du projectile, était la cause de la dérivation, un projectile sphérique, lancé par une arme rayée, devrait dévier du même côté qu'un projectile oblong. Or, l'expérience prouve tout le contraire: si le projectile oblong dévie à droite, le projectile sphérique dévie à gauche et *vice versa*.

La résistance de l'air sur la partie antérieure d'un projectile sphérique passe

NOTE C.

RÉSISTANCE OBLIQUE DE L'AIR SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION.

Déterminer la résistance de l'air sur une surface de révolution qui est animée d'un mouvement de translation suivant une direction quelconque.

Nous admettrons, d'après l'hypothèse ordinaire, que la résistance éprouvée par chaque élément d'une surface, est

---

constamment par le centre de figure qui est aussi le centre de gravité; de sorte que le centre du boulet ne pourra sortir du plan vertical passant par la direction de sa vitesse initiale, par le seul effet de la résistance sur la partie antérieure. Mais alors pourquoi le boulet lancé par une arme rayée sort-il de ce plan? Il faut ici avoir égard au phénomène signalé pour la première fois par le Docteur Magnus, et qui consiste dans la différence de pression que l'air exerce sur les côtés opposés d'une sphère douée d'un double mouvement de translation et de rotation. En vertu de ce double mouvement, le boulet éprouve une augmentation de pression sur l'hémisphère qui tourne dans le même sens de la translation, et, au contraire, une dépression sur l'hémisphère qui tourne en sens inverse. Cela posé, si un boulet sphérique reçoit, au point de départ, une rotation initiale autour d'un diamètre tangent à la trajectoire, son axe de rotation se conservera constamment parallèle à lui-même, dans tout le cours du mouvement. Par conséquent, cet axe, à partir du point de départ, formera avec la tangente à la trajectoire un angle qui, d'abord nul, ira de plus en plus en croissant à mesure que le boulet s'avance. Il en résulte que l'un des hémisphères latéraux se mouvra dans le même sens que le centre de gravité du boulet, tandis que l'hémisphère opposé se mouvra en sens inverse. Par conséquent, il y aura augmentation de pression de l'air d'un côté et dépression de l'autre, et par suite le boulet sera dévié du côté vers lequel tourne l'hémisphère inférieur du boulet au point de départ.

Le mouvement d'un projectile oblong doit aussi être influencé par la différence de pression que l'air exerce sur ses deux côtés. Mais, comme, en vertu du mouvement conique de l'axe de figure, le pôle en est tantôt supérieur, tantôt inférieur à la trajectoire et tantôt à droite, tantôt à gauche, la différence de pression change plusieurs fois de signe; de sorte que les effets de cette dernière, doivent s'élider en partie entre eux. D'ailleurs la dérivation provenant de la résistance de l'air contre le projectile qui se présente de flanc prime tellement toutes les déviations dues à d'autre causes, que les effets produits par la différence de pression ne deviennent pas apparents dans le tir des projectiles oblongs. *(Note de 1872).*

proportionnelle au produit de l'aire de cet élément par le carré de la composante normale de la vitesse.

Soient $d\sigma$ l'aire de l'élément de la surface, ι l'angle compris entre la normale extérieure à la surface et la direction de la vitesse. La résistance exercée sur l'élément $d\sigma$ est proportionnelle au carré de la vitesse multiplié par

$$d\sigma \cos^2 \iota.$$

L'équation

$$\cos \iota = 0,$$

jointe à celle de la surface, détermine une courbe qui divisera cette surface en deux parties telles que la valeur de *cos* ι sera positive pour tous les points de l'une et négative pour ceux de l'autre. La première sera la partie antérieure du corps, sur laquelle s'exerce la résistance, la seconde sera la partie postérieure qui n'éprouve point de résistance.

Cette courbe de séparation entre la partie antérieure et la partie postérieure est, en d'autres termes, la ligne de contact de la surface courbe avec un cylindre circonscrit dont les arêtes sont parallèles à la direction de la vitesse du mobile.

Pour déterminer la résistance sur un solide de révolution quelconque dont tous les points décrivent des droites parallèles, faisant avec l'axe de figure l'angle δ, prenons pour axe des x l'axe même de figure, pour plan des xy, un plan parallèle à la direction de la vitesse.

Nous regarderons chaque point de la surface de révolution comme défini par sa latitude λ, égale à l'angle que forme la normale à ce point avec le plan des yz qui sera

l'équateur, et par sa longitude L, égale à l'angle dièdre que fait le plan méridien qui le contient avec le plan des xy.

Nous prendrons pour élément de la surface de révolution l'aire élémentaire comprise entre deux méridiens infiniment voisins, et les arcs qu'ils interceptent sur deux parallèles infiniment voisins. L'aire élémentaire ainsi définie a pour expression

$$d\sigma = \rho y d\lambda dL,$$

ρ étant le rayon de courbure, y l'ordonnée correspondante à l'abscisse x de la courbe méridienne; par suite la résistance normale sur chaque élément sera proportionnelle au carré de la vitesse multiplié par

$$\rho y \cos^2 \iota d\lambda dL.$$

Décomposons cette résistance normale en trois forces parallèles aux trois axes des coordonnées. A cause de la symétrie de la surface de révolution, par rapport au plan des xy, il est évident qu'à chaque composante parallèle à l'axe des x située d'un côté du plan des xy, correspond une autre composante égale, située à égale distance de l'autre côté du même plan. Il en est de même pour les composantes parallèles aux axes des y et des z. Par conséquent toutes les composantes parallèles aux axes des x et des y auront leurs résultantes comprises dans le plan des xy; tandis que les composantes parallèles à l'axe des z se détruiront deux à deux. Nous n'aurons donc point à considérer celles-ci, et quant aux autres, pour en faire la somme, il suffira d'ajouter ensemble celles qui sont d'un côté du plan des xy et de doubler le résultat.

La normale faisant avec les axes des x et des y les angles dont les cosinus sont

$$\sin\lambda \qquad \text{et} \qquad \cos\lambda\cos L,$$

on aura

$$\rho y\cos^2 i\sin\lambda\, d\lambda\, dL,$$

pour la composante suivant l'axe des x, et

$$\rho y\cos^2 i\cos\lambda\cos L\, d\lambda\, dL,$$

pour la composante suivant l'axe des y.

Si l'on transporte toutes ces composantes parallèlement à elles-mêmes à l'origine, il en provient d'abord deux forces rectangulaires

$$X=-2\int\int \rho y\cos^2 i\sin\lambda\, d\lambda\, dL,$$

$$Y=-2\int\int \rho y\cos^2 i\cos\lambda\cos L\, d\lambda\, dL,$$

appliquées à l'origine suivant les axes des x et des y, qu'on a affectées du signe négatif, parce qu'elles agissent en sens contraire des axes respectifs; ensuite, un couple autour de l'axe des z dont le moment est exprimé par

$$K=2\int\int \rho y\,(y\sin\lambda - x\cos\lambda)\cos^2 i\cos L\, d\lambda\, dL.$$

Inutile de dire que, pour avoir la résistance effective de l'air ainsi que le couple qui en provient, il faudra

multiplier ces résultats par le carré de la vitesse, par la densité de l'air et par un coefficient numérique donné.

Le point où la direction de la résultante totale des forces X, Y et du couple K, coupe l'axe des x, sera donné par

$$x = \frac{K}{Y}.$$

C'est le point que nous avons nommé *centre de résistance.*

Les intégrales précédentes ne doivent s'étendre qu'à la partie antérieure de la surface, où l'on a

$$\iota < \frac{\pi}{2},$$

et dont le contour est déterminé sur cette surface, par l'équation

$$\cos\iota = 0.$$

Pour trouver $\cos\iota$, remarquons que les angles que fait la direction de la vitesse avec les axes des x, des y, des z sont respectivement

$$\delta, \qquad \frac{\pi}{2} - \delta, \qquad \frac{\pi}{2},$$

et que les cosinus des angles formés par la normale avec les mêmes axes sont

$$\sin\lambda, \qquad \cos\lambda\cos L, \qquad \cos\lambda\sin L.$$

On aura donc, d'après une formule connue de géométrie, pour le cosinus de l'angle formé par la direction de la vitesse avec la normale,

$$\cos \iota = \cos \delta \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \cos L.$$

L'équation

$$\cos \delta \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \cos L = 0$$

donnera la relation qui existe entre la latitude et la longitude des points de la courbe qui sépare la partie antérieure de la partie postérieure.

Si l'on fait dans cette équation

$$L = \pi,$$

on aura, pour déterminer la latitude du point où la courbe ci-dessus traverse le plan des xy,

$$\cos \delta \sin \lambda - \sin \delta \cos \lambda = 0;$$

d'où l'on tire

$$\lambda = \delta,$$

comme l'on devait s'y attendre, car c'est le point où l'élément du méridien contenu dans le plan des xy est parallèle à la direction de la vitesse.

Pour tous les points du méridien dont la latitude λ est moindre que δ, il faudra prendre les intégrales depuis $L = 0$ jusqu'à une valeur de L en fonction de λ, donnée par l'équation

$$\cos \delta \sin \lambda + \sin \delta \cos \lambda \cos L = 0,$$

c'est-à-dire jusqu'à

$$L = \pi - \varphi,$$

en désignant par φ un angle tel qu'on ait

$$\cos\varphi = \cot\delta \operatorname{tang}\lambda.$$

Ensuite, pour tous les points du méridien où la latitude λ est égale ou supérieure à δ, prendre les intégrales depuis $L = 0$ jusqu'à $L = \pi$, car, pour toutes ces valeurs de $\lambda \gtrless \delta$, les parallèles de la surface de révolution sont en totalité compris dans la partie antérieure qui éprouve la résistance.

D'après cela, en désignant par λ_0, λ_1 les latitudes des extrémités de l'arc de la courbe dont la révolution engendre la surface qu'on considère, nous aurons, dans le cas où $\delta \leqq \lambda_0 < \lambda_1$,

$$X = -2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y \sin\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2\iota\, dL,$$

$$Y = -2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y \cos\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2\iota \cos L\, dL,$$

$$K = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y\,(y\sin\lambda - x\cos\lambda)\, d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2\iota \cos L\, dL;$$

dans le cas où $\delta > \lambda_1 > \lambda_0$,

$$X = -2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y \sin\lambda\, d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2\iota\, dL,$$

$$Y = -2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y \cos\lambda d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \iota \cos L dL,$$

$$K = 2\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y\,(y\sin\lambda - x\cos\lambda)\, d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \iota \cos L dL;$$

enfin, dans le cas où $\lambda_0 < \delta < \lambda_1$,

$$X = -2\int_{\delta}^{\lambda_1} \rho y \sin\lambda d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2 \iota\, dL$$

$$-2\int_{\lambda_0}^{\delta} \rho y \sin\lambda d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \iota\, dL,$$

$$Y = -2\int_{\delta}^{\lambda_1} \rho y \cos\lambda d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2 \iota \cos L dL$$

$$-2\int_{\lambda_0}^{\delta} \rho y \cos\lambda d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \iota \cos L dL,$$

$$K = 2\int_{\delta}^{\lambda_1} \rho y\,(y\sin\lambda - x\cos\lambda)\, d\lambda \int_0^{\pi} \cos^2 \iota \cos L dL$$

$$+2\int_{\lambda_0}^{\delta} \rho y\,(y\sin\lambda - x\cos\lambda)\, d\lambda \int_0^{\pi-\varphi} \cos^2 \iota \cos L dL,$$

en désignant par φ un angle tel que

$$\cos\varphi = \cot\delta \operatorname{tang}\lambda.$$

Afin de faciliter les intégrations, il sera bien d'introduire

au lieu de la latitude λ, l'angle φ déterminé par cette dernière équation. On tire de celle-ci

$$\sin\lambda = \frac{\operatorname{tang}\delta\cos\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}},$$

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $\cos\imath$, on obtient

$$\cos^2\imath = \frac{\sin^2\delta\,(\cos\varphi+\cos L)^2}{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}.$$

Nous aurons donc

$$\int_0^{\pi}\cos^2\imath\,dL = \frac{\pi}{2}\sin^2\delta\left(\frac{1+2\cos^2\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}\right),$$

$$\int_0^{\pi-\varphi}\cos^2\imath\,dL = \frac{1}{2}\sin^2\delta\left[\frac{(\pi-\varphi)(1+2\cos^2\varphi)+3\sin\varphi\cos\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}\right],$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\imath\cos L\,dL = \sin^2\delta\left(\frac{\cos\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}\right),$$

$$\int_0^{\pi-\varphi}\cos^2\imath\cos L\,dL = \frac{1}{3}\sin^2\delta\left[\frac{3(\pi-\varphi)\cos\varphi+(2+\cos^2\varphi)\sin\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}\right].$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de X, Y, K, après y avoir mis pour λ sa valeur en fonction de φ, eu égard à laquelle on a

$$d\lambda = -\frac{\operatorname{tang}\delta\sin\varphi\,d\varphi}{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi},$$

et si l'on pose, pour abréger,

$$f(\varphi)=\int \rho y \frac{\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{(1+\tang^2\delta\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}},$$

$$f_1(\varphi)=\int \rho y \frac{1+2\cos^2\varphi)\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{(1+\tang^2\delta\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}},$$

$$f_2(\varphi)=3\int \rho y \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi d\varphi}{(1+\tang^2\delta\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}},$$

$$f_3(\varphi)=\tfrac{1}{3}\int \rho y \frac{2+\cos^2\varphi)\sin^2\varphi d\varphi}{(1+\tang^2\delta\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}},$$

$$f_4(\varphi)=\int \rho y (x-y\tang\delta\cos\varphi)\frac{\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{(1+\tang^2\delta\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}},$$

$$f_5(\varphi)=\tfrac{1}{3}\int \rho y (x-y\tang\delta\cos\varphi)\frac{2+\cos^2\varphi)\sin^2\varphi d\varphi}{(1+\tang^2\delta\cos^2\varphi)^{\frac{5}{2}}},$$

il vient, dans le cas où $\delta \leqq \lambda_0 < \lambda_1$,

$$X=\pi\frac{\sin^4\delta}{\cos^2\delta}[f_1(\varphi_1)-f_1(\varphi_0)],$$

$$Y=2\pi\frac{\sin^3\delta}{\cos\delta}[f(\varphi_1)-f(\varphi_0)],$$

$$Z=2\pi\frac{\sin^3\delta}{\cos\delta}[f_4(\varphi_1)-f_4(\varphi_0)];$$

dans le cas où $\delta > \lambda_1 > \lambda_0$,

$$X = \frac{\sin^4\delta}{\cos^2\delta}\left[(\pi-\varphi_1)f_1(\varphi_1)-(\pi-\varphi_0)f_1(\varphi_0)\right.$$

$$\left.+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f_1(\varphi)\,d\varphi + f_2(\varphi_1)-f_2(\varphi_0)\right],$$

$$Y = 2\frac{\sin^3\delta}{\cos\delta}\left[(\pi-\varphi_1)f(\varphi_1)-(\pi-\varphi_0)f(\varphi_0)\right.$$

$$\left.+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi)\,d\varphi + f_3(\varphi_1)-f_3(\varphi_0)\right],$$

$$K = 2\frac{\sin^3\delta}{\cos\delta}\left[(\pi-\varphi_1)f_4(\varphi_1)-(\pi-\varphi_0)f_4(\varphi_0)\right.$$

$$\left.+\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f_4(\varphi)\,d\varphi + f_5(\varphi_1)-f_5(\varphi_0)\right];$$

dans le cas où $\lambda_0 < \delta < \lambda_1$,

$$X = \frac{\sin^4\delta}{\cos^2\delta}\left[\pi f_1(\varphi_1)-(\pi-\varphi_0)f_1(\varphi_0)\right.$$

$$\left.-\int_0^{\varphi_0} f_1(\varphi)\,d\varphi - f_2(\varphi_0)+f_2(0)\right],$$

$$Y = 2\frac{\sin^3\delta}{\cos\delta}\left[\pi f(\varphi_1)-(\pi-\varphi_0)f(\varphi_0)\right.$$

$$\left.-\int_0^{\varphi_0} f(\varphi)\,d\varphi - f_3(\varphi_0)+f_3(0)\right],$$

$$K = 2\frac{\sin^3\delta}{\cos\delta}\left[\pi f_4(\varphi_1) - (\pi - \varphi_0) f_4(\varphi_0)\right.$$

$$\left. - \int_0^{\varphi_0} f_4(\varphi)\, d\varphi - f_5(\varphi_0) + f_5(0)\right];$$

φ_0 et φ_1 étant deux angles tels que

$$\cos\varphi_0 = \cot\delta \operatorname{tang}\lambda_0,$$

$$\cos\varphi_1 = \cot\delta \operatorname{tang}\lambda_1.$$

Les valeurs de f, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 s'obtiendront, dans chaque cas particulier, en substituant au lieu de ρ, x, y leurs valeurs en fonction de φ, d'après la nature de la courbe méridienne.

APPLICATIONS.

Le profil des projectiles oblongs est ordinairement composé de lignes droites et d'arcs de cercle. C'est pourquoi nous allons nous occuper de la surface de révolution engendrée par une ligne droite et de celle qui est engendrée par un arc de cercle. La première comprend comme cas particulier le cylindre et le plan; la seconde, la sphère.

Surface conique. La courbe génératrice étant une ligne droite, l'angle λ que forme la normale avec l'axe des y est constant et égal à la moitié de l'angle au sommet du cône.

Le rayon de courbure ρ est infini ; mais l'intégrale $\int \rho d\lambda$ a une valeur finie, égale à la longueur de la génératrice du cône. Pour adapter les formules précédentes au cas du cône, observons qu'on a en général

$$\rho d\lambda = ds,$$

$$ds \cos\lambda = dx,$$

$$ds \sin\lambda = -dy.$$

Nous avons donné le signe — à dy, parce que nous supposons la forme de la courbe génératrice, par rapport aux axes, telle que y croisse en sens inverse de ds.

Nous aurons donc

$$\int \rho y \sin\lambda d\lambda = -\int y dy,$$

$$\int \rho y \cos\lambda d\lambda = \int y dx,$$

$$\int \rho y^2 \sin\lambda d\lambda = -\int y^2 dy,$$

$$\int \rho y x \cos\lambda d\lambda = \int y x dx.$$

Dans le cas d'un tronc de cône dont le rayon de la grande base est R, le rayon de la petite base r, la hauteur h, nous aurons

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y \sin\lambda d\lambda = \int_r^R y dy = \frac{R^2 - r^2}{2},$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y \cos\lambda d\lambda = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx = \frac{h\,R+r}{2},$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho y^2 \sin\lambda\, d\lambda = \int_{r}^{R} y^2 dy = \frac{R^3-r^3}{3},$$

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \rho x y \cos\lambda d\lambda = \int_{x_0}^{x_1} xy\,dx = \frac{h^2(R+2r)}{6}.$$

De plus, on a φ constant et tel que

$$\cos\varphi = \left(\frac{R-r}{h}\right)\cot\delta.$$

En introduisant ces valeurs dans les formules, on obtient, pour le cas où $\delta \leqq \lambda$,

$$X = -\frac{\pi}{2}\frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\left[h^2\sin^2\delta + 2(R-r)^2\cos^2\delta\right],$$

$$Y = -\pi\frac{h^2(R^2-r^2)}{h^2+(R-r)^2}\sin\delta\cos\delta,$$

$$K = \frac{\pi}{3}\frac{h(R-r)\left[2(R^3-r^3)-h^2(R+2r)\right]}{h^2+(R-r)^2}\sin\delta\cos\delta.$$

Lorsque $\delta = 0$ ces expressions se réduisent à

$$X = -\pi\frac{(R^2-r^2)(R-r)^2}{h^2+(R-r)^2},$$
$$Y = 0,$$
$$K = 0;$$

c'est le cas d'un tronc de cône qui se meut dans le sens de son axe. Il faut remarquer que c'est la résistance sur la surface convexe seulement, et que si l'on voulait avoir la résistance totale on devrait y ajouter la résistance exercée sur la petite base.

Lorsque $h=0$, c'est-à-dire lorsque la surface conique se réduit à un plan perpendiculaire à l'axe de figure, on a

$$X=-\pi(R^2-r^2)\cos^2\delta,$$
$$Y=0,$$
$$K=0,$$

comme l'on devait s'y attendre.

Pour le cas où $\delta>\lambda$, on obtient

$$X=-\frac{1}{2}\frac{R^2-r^2}{h^2+(R-r)^2}\left\{(\pi-\varphi)\left[h^2\sin^2\delta+2(R-r)^2\cos^2\delta\right]+3h(R-r)\sin\delta\cos\delta\sin\varphi\right\},$$

$$Y=-\frac{1}{3}\frac{h(R+r)}{h^2+(R-r)^2}\left\{3h(R-r)(\pi-\varphi)\sin\delta\cos\delta+\left[2h^2\sin^2\delta+(R-r)^2\cos^2\delta\right]\sin\varphi\right\},$$

$$K=\frac{1}{9}\frac{2(R^3-r^3)-h^2(R+2r)}{h^2+(R-r)^2}\left\{3h(R-r)(\pi-\varphi)\sin\delta\cos\delta+\left[2h^2\sin^2\delta+(R-r)^2\cos^2\delta\right]\sin\varphi\right\},$$

où

$$\varphi=\arccos\left(\frac{R-r}{h}\cot\delta\right),$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\left(\frac{R-r}{h}\right)^2\cot^2\delta}.$$

La distance du centre de résistance à l'origine, c'est-à-dire à la grande base du tronc de cône, sera dans les deux cas

$$\frac{K}{Y} = \frac{h^2(R+2r)-2(R^3-r^3)}{3h(R+r)}.$$

On aurait pu trouver directement ce résultat, en partant de la considération que la résultante totale doit être perpendiculaire à la génératrice du cône et passer par le centre de gravité du trapèze formé par deux génératrices consécutives.

Si l'on fait

$$\delta = \frac{\pi}{2},$$

et par suite

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

on a, pour l'expression de la résistance sur un cône qui se meut perpendiculairement à son axe,

$$X = -\frac{\pi}{4}\frac{h^2(R^2-r^2)}{h^2+(R-r)^2},$$

$$Y = -\frac{2}{3}\frac{h^3(R+r)}{h^2+(R-r)^2},$$

$$K = \frac{2h^2}{9}\frac{2(R^3-r^3)-h^2(R+2r)}{h^2+(R-r)^2}.$$

Si $R = r$, le cône devient un cylindre, et l'on a, dans ce cas,

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$X = 0,$$

$$Y = -\frac{4}{3} h R \sin^2 \delta,$$

$$K = -\frac{2}{3} h^2 R \sin^2 \delta,$$

$$\frac{K}{Y} = \frac{1}{2} h.$$

Par conséquent, la résistance sur la convexité d'un cylindre est les deux tiers de la résistance sur sa section rectangulaire, et le centre de résistance est au milieu de l'axe.

Il importe de remarquer que la résistance estimée suivant la normale à l'axe de figure est, pour le cylindre, proportionnelle à

$$\sin^2 \delta,$$

tandis que, pour le cône tronqué dont la génératrice fait avec l'axe un angle supérieur à δ, elle est proportionnelle à

$$\sin \delta \cos \delta.$$

Le rapport de celle-ci à celle-là est donc proportionnel à

$$\cot \delta,$$

c'est-à-dire à une quantité fort grande toutes les fois que δ est très-petit.

Il résulte de là que le centre de résistance d'un cylindre surmonté d'un tronc de cône, est fort près du centre de résistance du tronc de cône, tant que la direction du mouvement de translation fait un petit angle avec l'axe de figure.

La même influence prépondérante de la partie antérieure amincie du projectile sur la position du centre de résistance subsiste, quelle que puisse être la forme de cette partie amincie, car cette partie courbe peut toujours être remplacée par un nombre infini de troncs de cône de hauteur infiniment petite.

On voit donc qu'en vertu de la forme acuminée des projectiles oblongs, le centre de résistance du projectile entier tombe fort près du centre de résistance de la partie acuminée, au commencement du mouvement, c'est-à-dire quand l'axe de figure fait avec la tangente à la trajectoire un angle petit.

Surface engendrée par la révolution d'un arc de cercle.

Le rayon de courbure est ici constant. Nous prendrons pour axe des y la perpendiculaire abaissée du centre de l'arc sur l'axe de figure.

Si l'on désigne par b la longueur de cette perpendiculaire, on aura

$$x = \rho \sin \lambda ,$$

$$y = \rho \cos \lambda - b ,$$

ou bien en introduisant l'angle φ,

$$x = \rho \frac{\operatorname{tang}\delta \cos\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}},$$

$$y = \rho \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\delta\cos^2\varphi}} - b.$$

En substituant ces valeurs dans les fonctions $f, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$, en effectuant les intégrations, et supposant

$$\lambda_0 = 0,$$

on trouvera, après toutes les réductions, pour les valeurs de l'angle δ comprises entre zéro et λ_1,

$$X = \frac{\pi}{4}\rho^2\left[(1+\cos^2\delta)\cos^4\lambda_1 + 4\cos^2\delta\sin^2\lambda_1\cos^2\lambda_1\right]$$

$$-\frac{\pi}{3}b\rho\left[(1+3\cos^2\delta)\cos^3\lambda_1 + 6\cos^2\delta\sin^2\lambda_1\cos\lambda_1\right]$$

$$-\frac{\pi}{8}\rho^2(1+\cos\delta)^2 + \frac{\pi}{6}b\rho(1+3\cos^2\delta)$$

$$+\frac{4}{3}b\rho\cos\delta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varphi},$$

$$Y = \frac{\pi}{2}\rho^2\sin\delta\cos\delta\cos^4\lambda_1 - \frac{2\pi}{3}b\rho\sin\delta\cos\delta\cos^3\lambda_1$$

$$-\frac{\pi}{4}\rho^2\sin\delta(1+\cos\delta) + \frac{\pi}{3}b\rho\sin\delta\cos\delta$$

$$+\frac{4}{9}b\rho\left(\frac{1+\sin^2\delta}{\sin\delta}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varphi}$$

$$-\frac{4}{9}b\rho\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varphi}},$$

$$K = \frac{\pi}{4} b\rho^2 \sin\delta\cos\delta\,(\sin\lambda_1\cos^3\lambda_1 - \sin^3\lambda_1\cos\lambda_1 - \lambda_1)$$

$$+ \frac{2\pi}{3} b^2\rho\sin\delta\cos\delta\sin^3\lambda_1 - \frac{1}{12} b\rho^2(3+\sin^2\delta)$$

$$+ \frac{2}{9} b^2\rho\,(2+\cos^2\delta) - \frac{2}{3} b^2\rho\,\delta\frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

$$+ \frac{1}{8} b\rho^2\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\log\left(\frac{1+\sin\delta}{1-\sin\delta}\right)$$

$$+ \frac{1}{4} b\rho^2\sin\delta\cos\delta\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\text{arc tang}\,(\text{tang}\,\delta\cos\varphi);$$

tandis que, pour toutes les valeurs de δ comprises entre λ_1, et $\frac{\pi}{2}$, on aura

$$X = \left(\frac{\pi-\varphi_1}{4}\right)\rho^2\left[(1+\cos^2\delta)\cos^4\lambda_1 + 4\cos^2\delta\sin^2\lambda_1\cos^2\lambda_1\right]$$

$$- \left(\frac{\pi-\varphi_1}{3}\right) b\rho\left[(1+3\cos^2\delta)\cos^3\lambda_1 + 6\cos^2\delta\sin^2\lambda_1\cos\lambda_1\right]$$

$$- \frac{\pi}{8}\rho^2(1+\cos\delta)^2 + \frac{\pi}{6} b\rho\,(1+3\cos^2\delta)$$

$$- \frac{1}{2}\rho^2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos\lambda_1$$

$$+ \frac{4}{3} b\rho\sin\delta\cos\delta\sin\varphi_1\sin\lambda_1$$

$$+ \frac{3}{4}\rho^2\sin\delta\cos\delta\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos^2\lambda_1$$

$$- \delta\rho \sin\delta\cos\delta \sin\varphi_1 \sin\lambda_1 \cos^2\lambda_1$$

$$+ \frac{1}{2}\rho^2 \cos\delta \arccos\left(\frac{\sin\lambda_1}{\sin\delta}\right)$$

$$+ \frac{4}{3}\delta\rho\cos\delta\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varphi}\,,$$

$$Y = \left(\frac{\pi-\varphi_1}{2}\right)\rho^2 \sin\delta\cos\delta\cos^4\lambda_1$$

$$- \frac{2(\pi-\varphi_1)}{3}\delta\rho\sin\delta\cos\delta\cos^3\lambda_1 - \frac{\pi}{4}\rho^2\sin\delta(1+\cos\delta)$$

$$+ \frac{\pi}{3}\delta\rho\sin\delta\cos\delta + \frac{2}{9}\delta\rho(1+\cos^2\delta+3\sin^4\delta)\sin\varphi_1\sin\lambda_1$$

$$+ \frac{2}{3}\delta\rho\sin^2\delta\cos\delta\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos\lambda_1$$

$$- \frac{1}{6}\rho^2(1+2\sin^2\delta\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos\lambda_1$$

$$- \frac{2}{9}\delta\rho(1-3\sin^2\delta)\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos^2\lambda_1$$

$$+ \frac{1}{6}\rho^2(1-3\sin^2\delta)\sin\varphi_1\sin\lambda_1\cos^2\lambda_1$$

$$+ \frac{1}{2}\rho^2\sin^2\delta\arccos\left(\frac{\sin\lambda_1}{\sin\delta}\right)$$

$$+ \frac{4}{9}\delta\rho\left(\frac{1+\sin^2\delta}{\sin\delta}\right)\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varphi}$$

$$- \frac{4}{9}\delta\rho\frac{\cos^2\delta}{\sin\delta}\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\delta\sin^2\varphi}}\,,$$

$$K = \left(\frac{\pi - \varphi_1}{4}\right) b\rho^2 \sin\delta\cos\delta\,(\sin\lambda_1\cos^3\lambda_1$$

$$- \sin^3\lambda_1\cos\lambda_1 - \lambda_1) + \frac{2(\pi-\varphi_1)}{3} b^2\rho\sin\delta\cos\delta\sin^2\lambda_1$$

$$- \frac{1}{12} b\rho^2(3+\sin^2\delta) + \frac{2}{9} b^2\rho(2+\cos^2\delta)$$

$$- \frac{8}{9} b^2\rho\cos^2\delta\sin\varphi_1\cos\lambda_1 + \frac{5}{12} b\rho^2\cos^2\delta\sin\varphi_1\cos^2\lambda_1$$

$$- \frac{2}{9} b^2\rho(2-3\cos^2\delta)\sin\varphi_1\cos^3\lambda_1$$

$$+ \frac{1}{6} b\rho^2(2-3\cos^2\delta)\sin\varphi_1\cos^4\lambda_1 - \frac{2}{3} b^2\rho\delta\frac{\cos\delta}{\sin\delta}$$

$$+ \frac{2}{3} b^2\rho\frac{\cos\delta}{\sin\delta}\operatorname{arc\,cos}\left(\frac{\cos\delta}{\cos\lambda_1}\right)$$

$$+ \frac{1}{4} b\frac{\rho^2\cos^2\delta}{\sin\delta}\log\left(\frac{1+\sin\delta}{\cos\lambda_1 + \sqrt{\cos^2\lambda_1 - \cos^2\delta}}\right)$$

$$+ \frac{1}{4} b\rho^2\sin\delta\cos\delta\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\delta\cos\varphi),$$

où l'on a

$$\cos\varphi_1 = \cot\delta\operatorname{tang}\lambda_1.$$

Les valeurs de X et Y dépendent des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce, dont Legendre a donné des tables ; la valeur de K dépend de l'intégrale

$$\int d\varphi\,\operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\delta\cos\varphi)$$

qu'on pourra calculer au moyen des séries.

Nous allons examiner les valeurs que prennent X, Y, K dans certains cas particuliers, valeurs qui pourraient s'obtenir directement, sans passer par les formules générales.

Si l'on fait, dans les premières formules,

$$\delta = 0,$$

il vient

$$X = -\frac{\pi}{2}\rho^2(1+\sin^4\lambda_1) - \frac{2\pi}{3}b\rho\cos\lambda_1(2+\sin^2\lambda_1)$$
$$Y = 0,$$
$$K = 0,$$

pour la résistance sur la surface qui se meut dans la direction de l'axe.

Si l'on fait, dans les secondes formules,

$$\delta = \frac{\pi}{2},$$

il vient

$$X = -\frac{\pi}{8}\rho^2(1-\cos^4\lambda_1) + \frac{\pi}{6}b\rho(1-\cos^3\lambda_1),$$

$$Y = -\frac{1}{6}\rho^2(3\lambda_1 + 3\sin\lambda_1\cos\lambda_1 + 2\sin\lambda_1\cos^3\lambda_1)$$
$$+\frac{4}{9}b\rho\sin\lambda_1(2+\cos^2\lambda_1),$$

$$K = -\frac{1}{3}b\rho^2(1-\cos^4\lambda_1) + \frac{4}{9}b^2\rho(1-\cos^3\lambda_1),$$

pour la résistance sur la surface qui se meut perpendiculairement à l'axe.

Si

$$b = 0$$

la surface de révolution est une sphère ; dans ce cas, si l'on fait

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2},$$

les formules donnent

$$X = -\frac{\pi}{8}\rho^2 (1 + \cos\delta)^2,$$

$$Y = -\frac{\pi}{4}\rho^2 \sin\delta (1 + \cos\delta),$$

$$K = 0,$$

pour la résistance sur un hémisphère.

Si en même temps

$$\delta = 0,$$

on obtient

$$X = -\frac{\pi}{2}\rho^2,$$

$$Y = 0,$$

$$K = 0,$$

pour la résistance éprouvée par un hémisphère qui se meut dans la direction de l'axe.

Tandis que si

$$\delta = \frac{\pi}{2},$$

il en résulte

$$X = -\frac{\pi}{8}\rho^2,$$

$$Y = -\frac{\pi}{4}\rho^2,$$

pour la résistance sur un hémisphère dont l'axe serait perpendiculaire à la direction du mouvement.

On ne peut disconvenir que les formules qui représentent la résistance dans le cas général ne soient un peu longues. D'ailleurs elles reposent sur une hypothèse physique qui n'est pas entièrement conforme à la nature; de sorte que, pour les faire accorder avec l'observation, il faudrait certainement les multiplier par des coefficients numériques convenables.

Il est grandement à désirer qu'on fasse des expériences directes sur la résistance qu'éprouvent les nouveaux projectiles oblongs, sous diverses inclinaisons par rapport à la direction du mouvement.

L'appareil à employer pour ces recherches, qui se présente tout d'abord à l'esprit, serait l'appareil de rotation de Borda.

Peut-être trouverait-on qu'il n'y a pas un grand avantage à employer pour les projectiles oblongs des proues d'une grande acuité, et qu'on pourrait remplacer la forme ogivale par la forme hémisphérique, sans augmenter sensiblement la résistance; car, d'après des expériences connues, il résulte qu'un cylindre surmonté d'un hémisphère, présente la même résistance que s'il était terminé par un cône dont la hauteur serait égale à $3\frac{1}{4}$ fois le rayon. Suivant la théorie ordinaire, la hauteur du cône ne devrait être qu'égale au rayon.

Si cette substitution pouvait se faire sans désavantage, les formules à employer pour déterminer la résistance seraient simplement, comme nous l'avons vu,

$$X = -\frac{\pi}{8}\rho^2 (1+\cos\delta)^2,$$

$$Y = -\frac{\pi}{4}\rho^2 \sin\delta\,(1+\cos\delta).$$

Si la forme hémisphérique de la proue n'atténuait pas assez la résistance de l'air, on pourrait encore essayer la proue formée par un demi-ellipsoïde de révolution allongé. La résistance oblique sur cette surface s'exprime par des formules bien plus simples que celles qui conviennent à la forme ogivale, généralement employée aujourd'hui.

DU

MOUVEMENT DES PROJECTILES

LANCÉS

PAR LES ARMES A FEU RAYÉES.

(*Spectateur militaire*, 2e série, t. 34. Paris, 1861).

AVANT-PROPOS.

Le but de cet écrit est de présenter sous une forme élémentaire, autant que le comporte la nature du sujet, la théorie du mouvement des projectiles lancés par les armes à feu rayées. C'est une exposition synthétique des résultats auxquels je suis arrivé dans un travail intitulé : *Études sur la trajectoire que décrivent les projectiles oblongs.*

Quant au mode d'exposition, j'ai profité des méthodes employées par MM. Airy et Poinsot (*) pour expliquer et calculer le phénomène de la précession des équinoxes.

(*) AIRY, *Mathematical tracts. Precession and nutation.* Cambridge, 1842. POINSOT, *Précession des équinoxes.* Paris, 1857.

On trouvera, dans le chapitre IV, un théorème sur la similitude des trajectoires, théorème que ne contiennent pas mes premières études, et que je signale au lecteur, parce qu'il me semble susceptible de diverses applications utiles. Il fournit, par exemple, le moyen de se former d'avance une juste idée du tir d'une bouche à feu dont la réalisation est coûteuse, par des expériences en petit sur une arme de moindres dimensions.

Turin, février 1861.

CHAPITRE I.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS DE ROTATION.

PROPOSITION I.

THÉORÈME.

Lorsqu'un corps est animé de deux rotations autour de deux axes qui se coupent sous un angle quelconque, ces deux rotations équivalent à une seule; et, si l'on prend sur les deux axes des longueurs proportionnelles aux vitesses angulaires, et qu'on construise le parallélogramme, la diagonale représentera en direction l'axe unique et en grandeur, la vitesse angulaire de la rotation équivalente aux deux autres.

La démonstration de ce théorème se trouve dans les traités élémentaires de mécanique; nous ne nous y arrêterons donc point, et nous renvoyons le lecteur à ces ouvrages, notamment à la *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* par M. Poinsot.

REMARQUE.

Si l'une des deux rotations est engendrée par l'action continue d'une force finie, on trouve l'effet de celle-ci, en divisant le temps en un grand nombre de petits intervalles, et en supposant la vitesse angulaire engendrée dans chacun de ces intervalles comme si elle était imprimée à la fin de chacun. On compose cette vitesse angulaire avec la vitesse

angulaire actuelle du corps, et on trouve ensuite la limite vers laquelle on converge en augmentant indéfiniment le nombre des intervalles.

PROPOSITION 2.

THÉORÈME.

Si une force constante Q *agit sur un corps, qui tourne autour de l'axe* OI, *avec une vitesse angulaire* V, *de manière à lui imprimer à chaque instant une rotation autour d'un axe* OA, *tel qu'il reste constamment compris dans le même plan* MN, *et qu'il soit toujours perpendiculaire à l'axe autour duquel le corps tourne à chaque instant, la vitesse angulaire du corps ne change point de grandeur dans tout le cours du mouvement.*

Fig. 1.

Soit v la vitesse angulaire que la force Q communiquerait au corps dans l'unité de temps, si elle agissait seule. Si l'on suppose que l'unité de temps, par exemple une seconde, soit divisée en n parties égales, la vitesse engendrée dans chacune de ces parties sera $\frac{v}{n}$.

En composant les vitesses angulaires V et $\frac{v}{n}$, dont les axes OI, OA sont perpendiculaires, on aura, pour la nouvelle vitesse angulaire du corps, au bout de $\frac{1''}{n}$,

$$OI' = \sqrt{V^2 + \frac{v^2}{n^2}}.$$

En composant cette vitesse angulaire avec la vitesse angulaire $\frac{v}{n}$, engendrée dans le second petit intervalle de temps, et observant que l'axe, autour duquel elle est produite, est, par hypothèse, perpendiculaire à l'axe OI', autour duquel le corps tourne actuellement, on trouvera, pour la vitesse angulaire, au bout du second intervalle de temps,

$$\sqrt{V^2 + \frac{v^2}{n^2} + \frac{v^2}{n^2}} = \sqrt{V^2 + 2\frac{v^2}{n^2}}.$$

De même, au bout du troisième intervalle de temps, la vitesse angulaire sera égale à

$$\sqrt{V^2 + 2\frac{v^2}{n^2} + \frac{v^2}{n^2}} = \sqrt{V^2 + 3\frac{v^2}{n^2}};$$

et ainsi de suite.

De sorte que la vitesse angulaire, au bout du $n^{ième}$ intervalle de temps, c'est-à-dire au bout de 1″, sera égale à

$$\sqrt{V^2 + n\frac{v^2}{n^2}} = \sqrt{V^2 + \frac{v^2}{n}}.$$

Si l'on augmente n indéfiniment, la limite de la vitesse angulaire sera

$$\sqrt{V^2} = V.$$

Donc, la vitesse angulaire du corps n'est point altérée dans la première seconde. Comme le même raisonnement s'applique à toutes les secondes successives, il s'ensuit que cette vitesse angulaire ne varie point dans tout le cours du mouvement.

PROPOSITION 8.

THÉORÈME.

Dans les mêmes circonstances que ci-dessus (fig. 1), *l'inclinaison de l'axe de rotation du corps sur le plan fixe* MN *ne varie point dans tout le cours du mouvement.*

De ce que, par hypothèse, l'axe *OA* de la rotation imprimée par la force *Q* reste constamment compris dans le plan *MN* et est toujours perpendiculaire à l'axe de la rotation actuelle du corps, il s'ensuit qu'il sera aussi toujours perpendiculaire à la projection *OB* de l'axe *OI* sur le plan fixe.

Le triangle *OBB'* étant rectangle en *B*, nous aurons

$$OB' = \sqrt{\overline{OB}^2 + \frac{v^2}{n^2}},$$

pour la projection de la vitesse angulaire du corps, au bout du premier intervalle de temps $\frac{1''}{n}$. Au bout du second intervalle de temps, la projection sera égale à

$$\sqrt{\overline{OB}^2 + 2\frac{v^2}{n^2}};$$

et au bout du $n^{ième}$ intervalle ou d'une seconde,

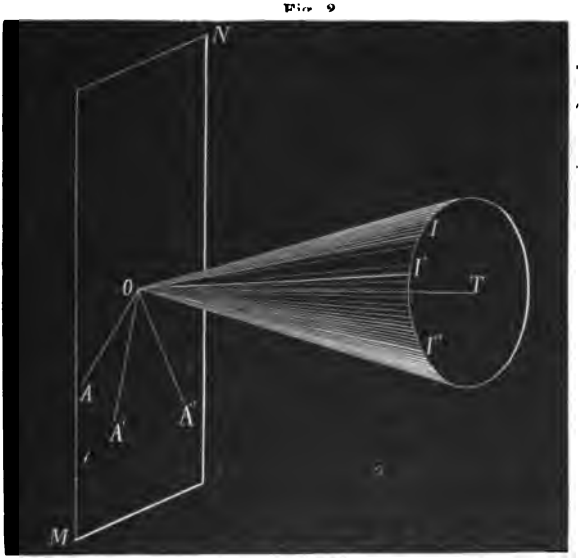
$$\sqrt{\overline{OB}^2+n\frac{v^2}{n^2}}=\sqrt{\overline{OB}^2+\frac{v^2}{n}}.$$

En faisant croître n indéfiniment, on voit que la projection de la vitesse angulaire sur le plan fixe ne varie point dans la première seconde de temps.

Puisque la même chose est vraie pour les secondes successives, il s'ensuit que la grandeur de la projection de la vitesse angulaire du corps sur le plan fixe est constante. Par conséquent, l'axe de rotation du corps restera toujours également incliné sur le plan fixe dans tout le cours du mouvement.

CONSÉQUENCE.

Fig. 9



De ce que l'inclinaison de l'axe de rotation se conserve constante, on peut conclure que l'axe instantané de la rotation du corps décrira simplement dans l'espace un cône droit $OII'I''\ldots$, à base circulaire, autour de la normale OT au plan fixe MN.

REMARQUE.

Il importe de remarquer que les deux théorèmes précédents ont lieu quelle que soit l'intensité, constante ou variable, de la force Q. En effet, si la force Q est variable, il faut, dans les démonstrations précédentes, remplacer

$$n\frac{v^2}{n^2}$$

par

$$\frac{v^2+v'^2+v''^2+\ldots}{n^2},$$

où v, v', v''.... représentent les vitesses angulaires engendrées par la force variable Q.

Or, si l'on désigne par u^2 la moyenne arithmétique entre les quantités v^2, v'^2, v''^2..., on aura

$$\frac{v^2+v'^2+v''^2+\ldots}{n^2}=\frac{nu^2}{n^2}=\frac{u^2}{n}.$$

Cette quantité converge vers zéro, tandis que n croît indéfiniment, car u est toujours une quantité finie.

Il en résulte que les conclusions déduites ci-dessus subsistent, quelle que soit la valeur de la force Q. L'intensité de cette force n'influe, comme on va le voir, que sur la vitesse angulaire, avec laquelle l'axe instantané de rotation décrit le cône droit dont on vient de parler.

PROPOSITION 4.

THÉORÈME.

Dans les mêmes circonstances que ci-dessus (fig. 1), *le pôle* I *tourne uniformément autour du pôle fixe* T *du plan* MN *avec une vitesse angulaire égale à*

$$\frac{v}{V \sin a},$$

où a désigne l'inclinaison de l'axe OI *sur la normale au plan fixe.*

Le pôle I a le même mouvement autour du pôle T que la projection OB de l'axe OI sur le plan fixe. Or, si l'on divise une seconde en n parties égales comme ci-dessus, et si l'on observe que l'angle B est droit, on aura

$$\operatorname{tang} \widehat{BOB'} = \frac{BB'}{OB};$$

et puisque

$$BB' = \frac{v}{n},$$

$$OB = OI \sin \widehat{TOI} = V \sin a,$$

il vient

$$\operatorname{tang} \widehat{BOB'} = \frac{v}{n V \sin a}.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, la valeur de

$$\text{tang } \widehat{BOB'}$$

converge vers la valeur de l'angle

$$\widehat{BOB'};$$

de sorte que, pour n fort grand, on aura

$$\widehat{BOB'} = \frac{v}{nV\sin a}.$$

En vertu de la Proposition 2, la vitesse angulaire V reste constante: donc, à chacun des intervalles successifs $\frac{1''}{n}$, des angles égaux à BOB' viennent s'ajouter à BOB'. Par conséquent, au bout d'une seconde, la projection de l'axe instantané aura tourné de l'angle

$$n\widehat{BOB'} = n\frac{v}{nV\sin a} = \frac{v}{V\sin a}.$$

De ce que la même chose est vraie pour chaque seconde successive, on en conclut que

$$\frac{v}{V\sin a}$$

représente la vitesse avec laquelle la projection de l'axe OI

tourne sur le plan fixe, ou, si l'on veut, la vitesse du pôle I autour du pôle fixe T du plan.

Comme V et a restent constants, on voit que cette vitesse angulaire du pôle I est simplement proportionnelle à la vitesse angulaire v.

Si v est constant, le mouvement du pôle I est uniforme.

REMARQUE.

Quant au sens de mouvement du pôle I autour de la normale OT, il est visible (fig. 1) que, si la force Q agit de manière à *éloigner* l'axe OI de l'axe fixe OT, le mouvement angulaire du pôle autour de l'axe fixe OT se fait dans le même sens que la rotation du corps estimée autour du même axe OT, sens de mouvement qu'on prend pour terme de comparaison, et qu'on appelle sens *direct:* de sorte que, dans ce premier cas, on peut dire que le pôle a un *mouvement direct* autour de l'axe fixe.

Fig. 3.

Si, au contraire (fig. 3), la force Q tend à *rapprocher* l'axe OI de l'axe fixe OT, on voit que le mouvement du pôle I autour de la normale se fait dans un sens contraire à celui de la rotation V, ou qu'il est ce qu'on appelle *rétrograde*.

PROPOSITION 5.

THÉORÈME.

Dans les mêmes circonstances que ci-dessus, tandis que l'axe instantané OI *décrit dans l'espace un cône droit à base circulaire autour de la normale au plan fixe, le même axe décrit dans l'intérieur du corps un autre cône droit à base circulaire dont la demi-ouverture b est donnée par l'équation*

$$\cot b = \frac{V^2}{v} - \cot a.$$

Supposons que, du centre O et d'un rayon $OI = 1$, on décrive la surface d'une sphère. Cette surface coupera le cône que décrit l'axe instantané dans l'espace absolu, suivant une circonférence S, et le cône, quel qu'il soit, décrit par le même axe dans l'intérieur du corps, suivant une certaine courbe s qu'il s'agit de déterminer.

Fig. 4.

Il est visible que le mouvement du corps pourrait être produit par un cône

mobile à base s, considéré comme attaché au corps et l'entraînant avec soi, qui roulerait, sans glisser, sur le cône fixe à base S. La ligne de contact de ces deux cônes sera à chaque instant l'axe autour duquel le corps tourne dans cet instant, ou ce qu'on appelle l'axe instantané. Dans ce mouvement, la courbe mobile s vient appliquer l'un après l'autre tous ses éléments successifs sur les éléments respectivement égaux de la courbe fixe S.

D'après cela, il est évident que la vitesse du pôle I, pour décrire la courbe S, est parfaitement égale à la vitesse que le même pôle I a pour décrire la courbe s.

Or, nous avons vu (Prop. 4) que la vitesse angulaire du pôle I autour de l'axe fixe OT est représentée par

$$\frac{v}{V \sin a}.$$

Pour passer de cette vitesse angulaire à la vitesse que le pôle I a sur la circonférence S, il suffit de la multiplier par le rayon de cette circonférence, qui est évidemment égale à

$$\sin a.$$

Il en résulte que la vitesse du pôle I sur la circonférence S sera

$$\frac{v}{V}.$$

Et cette vitesse sera aussi celle du pôle I sur la courbe s.

Si l'on désigne par $2b$ l'angle au sommet du cône circulaire osculateur du cône s, suivant OI, le rayon de

courbure de la courbe s sera $\sin b$. En divisant par ce rayon la vitesse

$$\frac{v}{V},$$

on aura

$$\frac{v}{V \sin b}$$

pour la vitesse angulaire du pôle I autour de l'axe du cône mobile, dont la base est la courbe s.

Fig. 5.

Il est maintenant évident que la vitesse angulaire de rotation V autour de l'axe instantané OI doit être égale à la résultante des deux vitesses angulaires de rotation autour des axes des cônes circulaires qui sont osculateurs des cônes roulants S et s, en OI. Si l'on prend sur ces deux axes OT, Ot (fig. 5) des longueurs

$$OA = \frac{v}{V \sin a} \text{ et } OB = \frac{v}{V \sin b},$$

et qu'on construise le parallélogramme $OACB$, la diagonale OC sera égale à V. Or, on a

$$OC = OA \cos a + OB \cos b;$$

ce qui donne, en mettant pour OC, OA, OB, leurs valeurs

$$V = \frac{v}{V}\cot a + \frac{v}{V}\cot b\,;$$

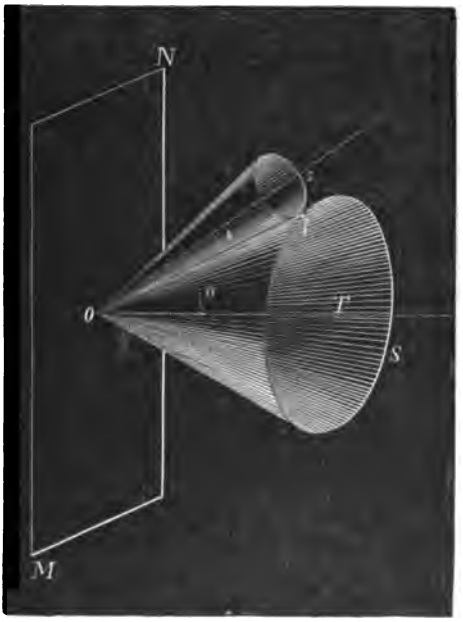
d'où l'on tire

$$\cot b = \frac{V^2}{v} - \cot a.$$

Telle est l'expression de la demi-ouverture du cône circulaire osculateur du cône mobile s.

Mais nous avons vu (Prop. 2, 3) que la vitesse angulaire V de rotation du corps, l'angle $2a$ au sommet du cône fixe S, sont des quantités constantes; il en résulte que si v est aussi constant, ou, en d'autres termes, si la force Q est constante, l'angle $2b$ au sommet du cône mobile s est constant, et que, par conséquent, s est un cercle aussi bien que S.

Fig. 6.



On peut donc se faire une idée très nette du mouvement d'un corps, tournant autour d'un axe, soumis à l'action d'une force constante qui tend à le faire tourner autour d'un autre axe perpendiculaire au premier, et toujours compris dans un même plan fixe, par

cette image si simple de deux cônes circulaires de même sommet O (fig. 6), dont l'un, IOs, d'une ouverture $2b$, roule sans glisser sur la surface de l'autre IOS, d'une ouverture $2a$.

L'ouverture du cône mobile se déterminera à l'aide de l'équation

$$\cot b = \frac{V^2}{v} - \cot a,$$

ou bien de l'équation

$$\operatorname{tang} b = \frac{\frac{v}{V^2}}{1 - \frac{v}{V^2}\cot a}.$$

Lorsque la quantité

$$\frac{v}{V^2}\cot a$$

est fort petite, on aura approximativement

$$b = \frac{v}{V^2}.$$

REMARQUE.

Si le mouvement du pôle I autour de la normale fixe OT est *direct*, les deux surfaces coniques se touchent *extérieurement* (fig. 6); de sorte que le cône mobile roule en

touchant par sa surface *convexe* la surface *convexe* du cône fixe (*).

Si le mouvement est *rétrograde*, le cône mobile tombe dans l'intérieur du cône fixe (fig. 7); de sorte qu'il roule en touchant par sa surface *convexe* la surface *concave* du cône fixe.

Fig. 7.

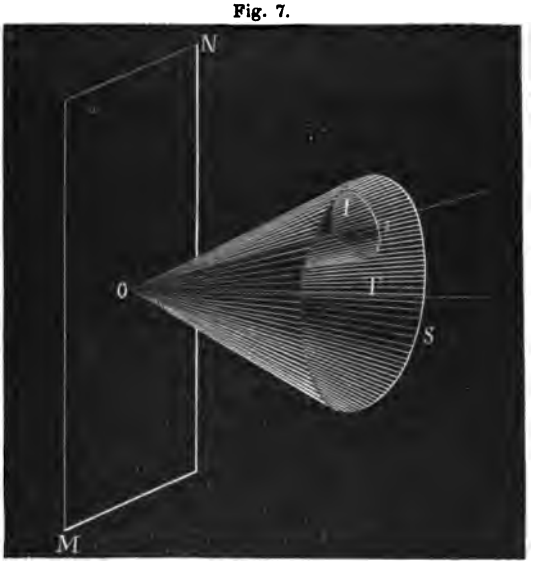
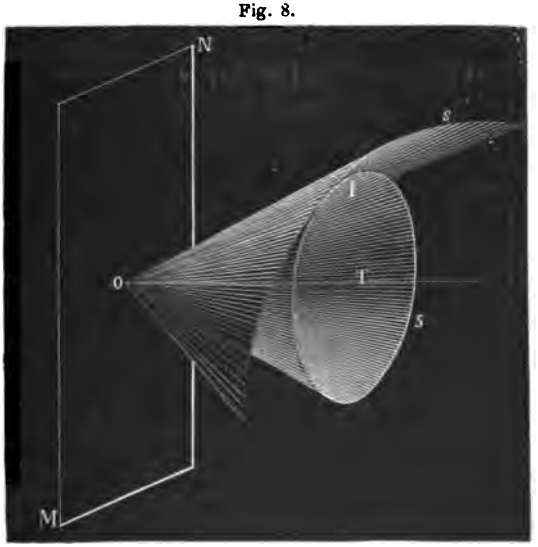


Fig. 8.



(*) Le mouvement peut être *direct*, et les deux surfaces coniques se toucher intérieurement. C'est lorsque le cône fixe tombe dans l'intérieur du cône mobile (fig. 8), de manière à être enveloppé par celui-ci, qui roule en touchant par sa surface *concave* la surface *convexe* du cône fixe. Nous n'aurons point à considérer ce cas.

CHAPITRE II.

DÉCOMPOSITION DU MOUVEMENT DE TRANSLATION.

PROPOSITION 6.

THÉORÈME.

Si un corps se meut dans l'espace en vertu d'une vitesse initiale et sous l'action d'une force F, *et si l'on projette à chaque instant son centre de gravité sur un axe quelconque, sa projection s'y mouvra comme un corps qui, ayant même masse que le mobile dont il s'agit, aurait pour vitesse initiale la projection de la vitesse initiale du mobile, et pour force agissante la projection* P *de la force* F.

La démonstration de ce théorème se trouve dans tous les traités de mécanique.

Nous n'avons parlé que d'une seule force F appliquée au mobile; mais le théorème n'en a pas moins une entière généralité; car, s'il y a des forces en nombre quelconque, on peut toujours les remplacer par leur résultante passant par le centre de gravité.

CONSÉQUENCE.

Si la projection P, sur une droite fixe, de la force F qui agit sur le mobile ne dépend que de la vitesse de la projection du centre de gravité du mobile sur la même droite, le mouvement sur cette droite sera indépendant des

mouvements des projections du corps sur d'autres droites, car la force qui agit sur le mobile projeté est indépendante du mouvement des autres projections. Dans ce cas, la projection du mobile sur la droite fixe se trouvera, au bout d'un temps quelconque, au même point, et aura la même vitesse que si les forces et les vitesses étaient nulles parallèlement à d'autres droites; de sorte que la question sera réduite au mouvement rectiligne.

PROPOSITION 7.

THÉORÈME.

Si l'on projette sur un plan fixe le mouvement quelconque d'un corps, ainsi que la force qui le sollicite, le mouvement de la projection n'est autre chose que le mouvement que prendrait dans ce plan un corps de même masse que celui qui se meut dans l'espace, sous l'action de la force projetée; ce corps ayant reçu une vitesse initiale égale à la projection de la vitesse initiale du mobile dans l'espace.

Ce théorème se trouve également démontré dans tous les traités de mécanique.

CONSÉQUENCE.

Si la projection Q, sur un plan fixe, de la force F qui agit sur le mobile ne dépend que de la vitesse de la projection du mobile sur ce plan, le mouvement sur le plan fixe pourra être déterminé séparément, comme si les mouvements sur d'autres plans ou d'autres axes n'existaient pas, et la question sera réduite au mouvement sur un plan.

CHAPITRE III.

SOLUTION DU PROBLÈME DU MOUVEMENT DES PROJECTILES DES ARMES A FEU RAYÉES.

PROPOSITION 8.

PROBLÈME.

Déterminer le mouvement d'un cylindre droit lancé dans l'air suivant une direction quelconque, le centre de gravité étant au milieu de l'axe de figure. Le cylindre possède à l'origine un mouvement de rotation autour de son axe de figure.

La résistance de l'air sur la base plane antérieure du cylindre s'exercera dans la direction de l'axe de figure; la résistance sur la surface convexe sera dirigée suivant la normale au même axe et passera par son centre. Par conséquent, la résistance de l'air sera constamment dirigée vers le centre de figure, et par suite vers le centre de gravité du mobile, puisque ces deux centres se confondent.

La résultante des forces qui agissent sur le mobile étant une force appliquée constamment à son centre de gravité, elle n'aura aucune influence sur le mouvement de rotation

autour de ce point, qui sera uniquement dû à l'état initial du mobile, et le même que si le centre de gravité ne se déplaçait pas.

De plus, à cause de la symétrie du cylindre autour de son axe de rotation, les pressions exercées sur cet axe par les forces centrifuges de ses différents points, qui sont engendrées par la rotation, se détruiront évidemment deux à deux.

Par conséquent, le cylindre tournera constamment et uniformément autour de son axe de figure, qui demeurera toujours parallèle à lui-même; en même temps, tous les points du cylindre décriront des trajectoires parallèles à la trajectoire de son centre de gravité.

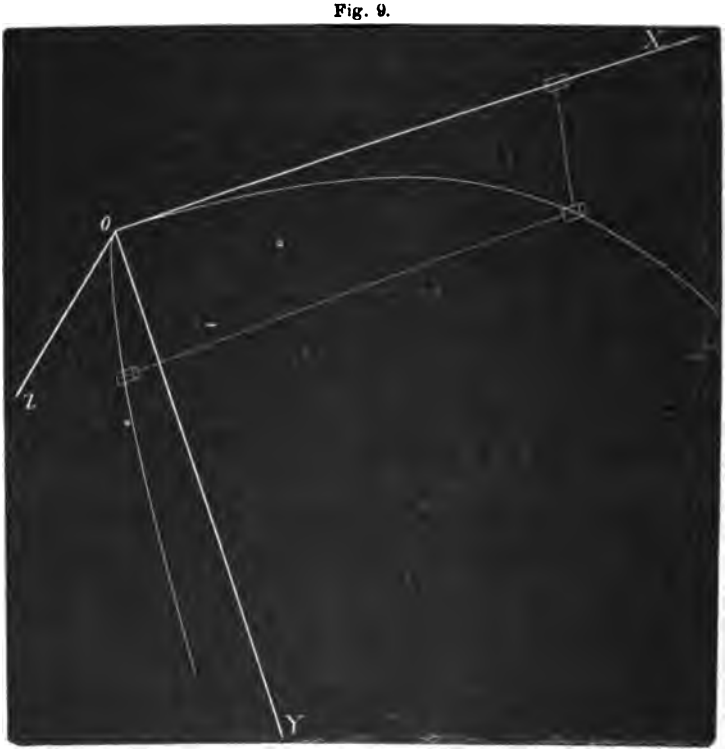
Voyons maintenant la manière de déterminer cette trajectoire que décrit le centre de gravité.

Si l'on admet l'hypothèse ordinaire, d'après laquelle la pression qui s'exerce entre un fluide et une surface solide dans leur mouvement relatif, est proportionnelle au carré de la vitesse relative estimée suivant la normale à la surface, il en résulte que la résistance éprouvée par la base antérieure du cylindre est proportionnelle à cette base et au carré de la vitesse du mobile estimée suivant la direction de l'axe du cylindre, direction qui demeure invariable dans tout le cours du mouvement, ainsi que nous l'avons vu précédemment.

La résistance exercée contre la surface convexe du cylindre sera, d'après un théorème connu, proportionnelle aux deux tiers de la section longitudinale du cylindre et au carré de la vitesse du mobile estimée suivant une direction normale à l'axe de figure du cylindre, direction qui sera évidemment celle du plan normal à l'axe de figure, ou, en d'autres termes, celle du plan de l'*équateur* du projectile.

Si l'on projette donc le mouvement du centre de gravité sur un axe fixe OX qui soit l'axe de figure du projectile à l'origine, et sur un plan fixe OYZ qui soit l'équateur du projectile à l'origine, les mouvements des deux projections du centre de gravité du cylindre sur cet axe OX et sur ce

Fig. 9.



plan OYZ s'effectueront indépendamment l'un de l'autre et seront précisément égaux à ceux qu'auraient deux cylindres pareils, dont l'un, étant enfilé suivant son axe de figure sur l'axe OX, glisserait sans frottement sur cet axe, et dont l'autre serait assujetti à glisser sans frottement par sa base plane sur le plan OYZ; l'un et l'autre ayant reçu

primitivement des vitesses initiales égales respectivement aux projections de la vitesse initiale du mobile de l'espace sur l'axe et le plan fixes.

En effet, la somme algébrique des projections sur l'axe *OX* des forces qui sollicitent le mobile sera composée d'un terme constant dû à la pesanteur, et d'un terme dû à la résistance de l'air, proportionnel au carré de la vitesse du mobile estimée suivant cet axe; en sorte que le mouvement du centre de gravité parallèlement à cet axe *OX* sera le même que celui d'un cylindre égal isolé (Prop. 6).

De même, la somme algébrique des projections sur le plan fixe *OYZ* des forces qui sollicitent le mobile sera composée d'un terme constant provenant de la pesanteur, et d'un terme proportionnel au carré de la vitesse du mobile estimée suivant ce plan; en sorte que le mouvement du centre de gravité parallèlement à ce plan *OYZ* sera indépendant du mouvement dans la direction de l'axe *OX* et pourra en être déterminé séparément (Prop. 7).

Ainsi, le problème du mouvement d'un cylindre droit tournant lancé dans l'air se réduit au problème du mouvement d'un cylindre qui glisse suivant son axe sur une droite inclinée à l'horizon, et au problème du mouvement d'un cylindre qui glisse en s'appuyant par sa base sur un plan incliné, en faisant abstraction du frottement et tenant compte de la résistance de l'air.

Le premier problème ne présente aucune difficulté; le second est en tout point pareil à celui du mouvement d'une sphère dans l'air, problème qu'on résout au moyen des méthodes connues.

CONSÉQUENCE.

Si la direction de la vitesse initiale du centre de gravité

est comprise dans le même plan vertical que l'axe de figure du cylindre, la résistance sur la surface convexe de celui-ci sera toujours comprise dans le même plan vertical pendant tout le cours du mouvement; en sorte que la trajectoire sera plane, tandis qu'elle est à double courbure dans le cas général.

PROPOSITION 9.

PROBLÈME.

Un cylindre droit dont le centre de gravité, situé sur l'axe, ne coïncide point avec le centre de figure, est lancé dans l'air suivant une direction quelconque. Le cylindre possède à l'origine une très-grande vitesse angulaire de rotation autour de son axe de figure. On propose de déterminer le mouvement de rotation du cylindre, dans toute la suite du temps.

La seule force qui agisse pour troubler la rotation du cylindre est la résistance de l'air appliquée au centre de figure, et constamment comprise dans le plan de l'axe de figure, et de la direction du mouvement du centre de gravité. Son effet sera de tendre à faire tourner le cylindre autour d'un axe toujours perpendiculaire à ce plan.

Considérons le mobile à l'origine, où l'axe de rotation coïncide avec l'axe de figure. Nous avons ici un corps qui tourne autour d'un axe, soumis à l'action d'une force qui tend à le faire tourner autour d'un autre axe compris dans le plan normal à la direction du mouvement du centre de gravité, et perpendiculaire à l'axe de la rotation actuelle du corps. C'est précisément le cas considéré dans les Propositions 2, 3, 4, 5.

Par conséquent, la grandeur de la vitesse angulaire de rotation restera constante, et l'axe instantané de rotation prendra dans l'espace absolu un mouvement conique autour de la direction de la vitesse du centre de gravité.

La vitesse du pôle de l'axe instantané, autour de la direction de la vitesse du centre de gravité, sera égale à

$$\frac{v}{V \sin a},$$

où v désigne la vitesse angulaire que la résistance de l'air engendrerait dans une seconde si, pendant ce temps, elle se conservait constante en intensité et en direction relativement au mobile; V, la vitesse angulaire de rotation du mobile; a, l'angle que fait l'axe de rotation avec la direction de la vitesse du centre de gravité.

Tandis que l'axe instantané décrit ce cône dans l'espace absolu, il décrit dans l'intérieur du corps un autre cône dont la demi-ouverture b est donnée par l'équation (Prop. 5)

$$\cot b = \frac{V^2}{v} - \cot a.$$

D'après l'hypothèse posée, V est fort grand comparativement à v; il s'ensuit que b est fort petit, c'est-à-dire que l'axe instantané de rotation du cylindre est très-voisin de l'axe de figure.

L'angle b, dans le tir des projectiles, n'est ordinairement que de quelques secondes; de sorte que l'écart des deux axes à la partie antérieure des projectiles n'est que de quelques centièmes de millimètre tout au plus.

Nous pourrons donc regarder, sans aucune erreur sensible,

ces deux axes comme n'en formant qu'un seul, quand il ne s'agit que d'étudier les mouvements de ces axes dans l'espace absolu.

Si l'on admet que l'axe de figure du cylindre se confond toujours avec l'axe instantané de rotation, il en résulte que l'axe de la rotation que la résistance de l'air tend à produire sera constamment perpendiculaire à l'axe de la rotation acquise.

On en conclut que, quand le cylindre que nous considérons a reçu une très-grande vitesse de rotation autour de son axe de figure, s'il est lancé dans l'air suivant une direction quelconque:

1° Sa vitesse angulaire de rotation demeure constante dans tout le cours du mouvement;

2° Son axe de figure prend autour de la direction de la vitesse du centre de gravité un mouvement conique très-lent par rapport à la rotation du mobile, et qui est direct ou rétrograde selon que le centre de figure du corps est en avant ou en arrière du centre de gravité.

REMARQUE.

Il importe de remarquer que l'ouverture $2a$ du cône décrit dans l'espace par l'axe de figure du cylindre, et que la vitesse

$$\frac{v}{V \sin a}$$

du pôle de celui-ci, sont variables et dépendent du mouvement de translation du mobile. Car l'angle a et la vitesse angulaire r, qui est naturellement une fonction du même angle et de la vitesse du centre de gravité, varient dans

les différents points de la courbe ou trajectoire que décrit le centre de gravité (*).

Si nous avons considéré isolément la rotation, c'est pour en donner une idée nette; mais lorsqu'il s'agira de calculer le mouvement du projectile, il faudra tenir compte en même temps des deux mouvements de rotation et de translation qui influent mutuellement l'un sur l'autre.

PROPOSITION 10.

PROBLÈME.

Déterminer le mouvement de translation du cylindre considéré dans le problème précédent.

Tandis que l'axe de figure du cylindre décrit un cône, avec une vitesse angulaire variable, autour de la direction de la vitesse du centre de gravité, celui-ci décrit une courbe dans l'espace qu'il s'agit de déterminer.

Il est très-difficile qu'on parvienne à obtenir, à l'aide du calcul intégral, des valeurs exactes ou même approchées, — assez simples pour être de quelque utilité en pratique, — des coordonnées du centre de gravité à un instant quelconque; mais on pourra toujours déterminer la vitesse et la position du mobile, à chaque instant, de la manière suivante.

(*) Nous avons fait voir dans l'Étude précédente que la vitesse angulaire v est égale au couple provenant des résistances exercées par l'air sur tous les points de la surface du projectile transportées parallèlement à elles-mêmes au centre de gravité, divisé par le moment d'inertie du projectile autour de l'axe de figure, ou, en d'autres termes, que v est égal au produit de la résistance de l'air normale à l'axe de figure par la distance du centre de résistance au centre de gravité, divisé par le moment d'inertie autour de l'axe de figure. (*Note de 1872*).

Imaginons que le temps total, pendant lequel s'effectue le mouvement du projectile, soit divisé en un très-grand nombre de parties égales.

Concevons que le mobile, pendant chacun des petits intervalles de temps partiels, se meuve parallèlement à lui-même, et qu'au bout de chaque intervalle son axe de figure tourne instantanément autour de la tangente à la trajectoire, — ou, en d'autres termes, autour de la direction de la vitesse du centre de gravité, — de la quantité angulaire relative à cet intervalle de temps.

La succession des mouvements, que nous substituons ainsi au mouvement réel, dans les diverses parties dans lesquelles la durée totale du mouvement a été décomposée, constituera un nouveau mouvement différent du mouvement réel. Mais la différence qui existe entre ces deux mouvements sera de plus en plus faible, à mesure que le nombre des parties égales, dans lesquelles nous avons divisé le temps total, sera plus considérable; et nous pouvons regarder le nouveau mouvement comme tendant indéfiniment à se confondre avec le mouvement réel, si nous supposons que le nombre de ces parties du temps total augmente jusqu'à l'infini.

Or, pour chaque intervalle de temps, nous savons, à l'aide de la Proposition 8, déterminer le mouvement de translation du cylindre dont les projections du centre de gravité sur la direction de l'axe de figure et sur le plan de l'équateur, dans leur position relative à l'origine de cet intervalle, se meuvent indépendamment l'une de l'autre.

Au bout de chaque intervalle, il sera facile, à l'aide de la Proposition 9, d'assigner la quantité angulaire dont l'axe de figure a tourné autour de la tangente à la trajectoire, pendant cet intervalle de temps. On n'aura pour cela qu'à multiplier par ce temps la vitesse angulaire

$$\frac{v}{V \sin a}$$

du pôle de l'axe de figure autour de la tangente à la trajectoire.

En commençant cette suite de constructions au point de départ du mobile, où l'on connaît la vitesse du centre de gravité en grandeur et en direction, ainsi que la direction de l'axe de figure, il est évident qu'on déterminera successivement tous les points de la trajectoire à double courbure que décrit le centre de gravité, et en même temps la vitesse dont celui-ci sera animé en chacun de ces points, ainsi que la direction de l'axe de figure du mobile, à tel degré d'approximation qu'on voudra.

REMARQUE.

Sans exécuter toute cette construction assez longue et pénible, nous pouvons nous rendre compte de l'effet produit par les différentes positions que peut avoir le centre de figure relativement au centre de gravité du cylindre pour entraîner ce dernier hors du plan de tir.

Nous supposerons que le cylindre est lancé suivant la direction de son axe de figure.

Si le centre de figure est situé en avant du centre de gravité, il est visible que la résistance de l'air tendra à éloigner l'axe de figure de la direction de la tangente à la trajectoire; de sorte que le mouvement conique de l'axe de figure sera direct (Prop. 4). Donc, si le mobile a reçu à l'origine une rotation telle que celles qui sont déterminées par la disposition ordinaire des rayures des armes à feu, c'est-à-dire, si la partie supérieure du projectile tourne de gauche à droite, son axe de figure se portera d'abord

latéralement à droite. Par suite, le projectile commencera par se présenter de travers à la résistance de l'air, qui interviendra pour amener le centre de gravité hors du plan de tir vers la droite.

A mesure que le projectile avance, il se présentera de plus en plus de flanc à la résistance de l'air, et devra par suite s'écarter de plus en plus du plan de tir.

Si, au contraire, le centre de figure est placé derrière le centre de gravité, il est visible que la résistance de l'air tendra à rapprocher l'axe de figure de la tangente à la trajectoire, et par suite donnera naissance à un mouvement conique rétrograde de l'axe de figure autour de la tangente (Prop. 4). Cet axe s'inclinera donc d'abord vers la gauche, et son inclinaison augmentera de plus en plus à mesure que le projectile s'éloignera du point de départ. Dans ce cas, la déviation aura lieu vers la gauche.

On en conclut que, dans le mouvement d'un projectile cylindrique, le centre de gravité est dévié vers la droite ou vers le gauche, suivant que le centre de figure se trouve devant ou derrière le centre de gravité.

Nous avons à peine besoin d'ajouter que, si la rotation initiale du cylindre avait lieu en sens inverse, la déviation se produirait en sens opposé.

PROPOSITION II.

PROBLÈME.

Déterminer le mouvement des projectiles lancés par les armes à feu rayées.

Les projectiles des armes à feu rayées sont des corps de révolution auxquels l'explosion de la charge de poudre

communique une très-grande vitesse de projection, ainsi qu'une très-grande vitesse angulaire de rotation.

Il est d'abord évident que la vitesse angulaire de rotation est en raison directe de la vitesse de projection, et en raison inverse de la partie de l'axe de l'âme de l'arme, qui répondrait à un tour entier des hélices, prolongées s'il est nécessaire. Si l'on désigne par u_0 la vitesse de projection, par p le pas des hélices, le projectile fera sur lui-même, dans chaque unité de temps, un nombre de révolutions égal à

$$\frac{u_0}{p};$$

de sorte que la vitesse d'un point lié au projectile et situé à une distance de l'axe égale à l'unité de longueur, ou la vitesse qu'on nomme angulaire, sera, au sortir de l'arme, égale à

$$\frac{2\pi u_0}{p}.$$

Cette vitesse angulaire est toujours très-grande dans les armes à feu, en raison de la grandeur de la vitesse de projection. Par exemple, dans le canon de 3^k de campagne piémontais, la vitesse de projection étant de 321 mètres, et le pas de 2^m,20, la vitesse angulaire de rotation s'élève à 146 tours par seconde ou à 917 mètres, pour un point placé à 1 mètre de distance de l'axe de rotation.

Les projectiles oblongs qu'on emploie dans les armes à feu rayées ne sont pas tout à fait cylindriques: ils sont ordinairement composés d'une partie cylindrique et d'une partie conoïde. La courbe méridienne de cette dernière partie est le plus souvent un arc de cercle dont le centre est situé hors de l'axe de figure.

L'expression de la résistance de l'air exercée contre ces projectiles, de forme cylindro-ogivale, est assez compliquée, ce qui rend le problème du mouvement de ces projectiles bien plus ardu que celui du mouvement des projectiles de forme parfaitement cylindrique.

Comme l'on ne saurait espérer d'obtenir, en termes finis, la valeur des divers éléments qui servent à déterminer le mouvement des projectiles de forme cylindro-ogivale, le meilleur parti nous paraît celui de décrire la trajectoire par points. Voici une méthode que nous proposons.

Nous ferons d'abord observer que tant que l'angle formé par l'axe du projectile avec la direction de la vitesse du centre de gravité, ou, en d'autres termes, avec la tangente à la trajectoire, n'est pas grand, la résistance estimée suivant l'axe du projectile ne s'écarte guère d'être proportionnelle au carré du cosinus de cet angle.

Quant à la résistance estimée normalement à l'axe du projectile, en raison de la partie conoïde, elle croît moins rapidement que pour un cylindre: pour des inclinaisons assez petites de l'axe sur la tangente à la trajectoire, elle est à peu près proportionnelle au sinus de cette inclinaison.

Remarquons, en outre, que la vitesse du centre de gravité du projectile, estimée suivant la normale à l'axe de figure, est toujours assez petite, du moins pour les amplitudes ordinaires du tir; de sorte qu'on ne commettra pas une grande erreur, si l'on suppose la résistance dans cette direction comme proportionnelle à la simple vitesse; bien entendu qu'on fera varier le coefficient de la résistance d'un élément à l'autre de la trajectoire.

D'après cela, nous supposerons:

1° La résistance, estimée suivant l'axe du projectile,

comme proportionnelle au carré de la vitesse du centre de gravité, estimée suivant le même axe;

2° La résistance, estimée normalement à l'axe du projectile, comme proportionnelle à la première puissance de la vitesse du centre de gravité, estimée suivant la même direction.

Supposons maintenant, comme nous l'avons fait dans la Proposition 10, que pendant un temps très-court, l'axe du projectile se conserve parallèle à lui-même, et qu'ensuite, au bout de ce temps, il tourne instantanément, autour de la tangente à la trajectoire, de la quantité angulaire relative à ce temps.

Pour déterminer le mouvement de translation pendant ce temps très-court, nous aurons à considérer :

1° Un projectile qui se meut, la pointe en avant, dans la direction de son axe, soumis à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse ;

2° Un autre projectile égal qui se meut de flanc, appuyé par sa base sur le plan de l'équateur, soumis à une résistance proportionnelle à la simple vitesse.

Le mouvement de translation étant ainsi décomposé, il sera aisé d'obtenir la valeur explicite des chemins parcourus par les projections du centre de gravité sur trois axes qui se déplacent d'un élément à l'autre de la trajectoire, et de là les chemins parcourus parallèlement à trois axes fixes. Car les projections du centre de gravité sur les axes mobiles ont le même mouvement que des points matériels distincts qui auraient même masse que le projectile et seraient sollicités respectivement par les composantes de la force qui agit sur le projectile donné, et la question sera réduite au mouvement rectiligne.

Après la translation, si l'on fait tourner l'axe du

projectile de la quantité angulaire relative au temps très-court de la translation, on aura la position de l'axe dans l'espace.

On pourra ainsi, de proche en proche, construire les positions successives du projectile. On connaîtra également la direction et la grandeur de sa vitesse.

Il est évident que plus sera grand le nombre de parties dans lesquelles on aura divisé le temps, plus la courbe ainsi construite s'approchera de la véritable trajectoire.

REMARQUE 1.

Il est bon de remarquer que cette description par points de la trajectoire peut s'adapter à des lois de la résistance en fonction de la vitesse autres que la loi ordinaire du carré, que nous avons rapportée simplement pour fixer les idées.

Il n'est pas même besoin que la loi de la résistance soit de nature à pouvoir être exprimée par une combinaison de signes de l'analyse mathématique. On peut concevoir qu'au moyen de nombreuses expériences, en faisant mouvoir le projectile sous diverses inclinaisons et avec diverses vitesses, on ait construit une table à double entrée, où se trouvent les valeurs de la résistance correspondantes aux divers angles et aux diverses vitesses.

Au moyen d'une pareille table, on déterminera les coefficients de la résistance à employer sur chacun des éléments dans lesquels la trajectoire a été divisée. Pour cet effet, à l'origine de chaque élément, on divisera la résistance, estimée suivant l'axe du projectile, qui se trouve dans la table, par le carré de la vitesse estimée suivant cet axe: le quotient sera le coefficient de la résistance suivant l'axe à employer pour cet élément. On divisera de même la résistance, estimée suivant la normale, qui se trouve dans la table, par la vitesse estimée suivant la même direction: le quotient

sera le coefficient de la résistance suivant la normale à employer dans le calcul de l'élément de la courbe.

Ces coefficients, au lieu d'être constants, varieront d'un élément à l'autre; mais leurs variations, pour l'amplitude ordinaire du tir, seront assez restreintes.

REMARQUE 2.

Les expériences exécutées en divers pays avec des projectiles oblongs, tirés au moyen d'armes rayées à la manière ordinaire, qui font tourner la partie supérieure du projectile de la gauche vers la droite, ont démontré que ces projectiles éprouvent toujours une déviation latérale vers la droite de l'observateur placé au point de départ et tourné vers la trajectoire, déviation qui a reçu le nom de *dérivation*.

Dans les projectiles oblongs, on s'efforce de porter le centre de gravité le plus près possible de la partie antérieure. Il semblerait donc, au premier abord, que le centre de résistance (*) devrait se trouver derrière le centre de gravité; et que, par conséquent, d'après la remarque de la Proposition 10, la dérivation devrait avoir lieu à gauche, puisque la direction des rayures est telle, que le dessus du projectile tourne de gauche à droite par rapport à l'observateur placé en arrière de l'arme.

Mais en y regardant de près, il n'est pas difficile de se convaincre que le centre de résistance d'un projectile terminé antérieurement par une partie conoïde, tombe fort près du centre de résistance de la partie conoïde, au commencement du mouvement, c'est-à-dire tant que la direction du mouvement de translation fait un petit angle avec l'axe de figure.

(*) Nous appelons *centre de résistance* du projectile le point où la direction de la résultante des résistances, — exercées sur tous les points de sa surface, — coupe l'axe de figure.

On voit par là qu'à moins de faire coïncider le centre de gravité du projectile avec le centre de résistance de la partie antérieure conoïde, ou de le porter en avant de ce point, — condition difficilement réalisable en pratique, — il arrivera toujours qu'au commencement du mouvement le centre de résistance du projectile entier tombera devant le centre de gravité, et que, par suite, la dérivation commencera par se faire vers la droite (Prop. 10, Remarque).

A mesure que l'inclinaison de l'axe de figure sur la direction du mouvement augmentera, le centre de résistance se rapprochera du centre de gravité, il l'atteindra même et passera de l'autre côté; alors la dérivation changera de sens. Mais, pour les amplitudes ordinaires du tir, cet effet ne se produit pas, ou, s'il se produit, il n'a pas le temps de compenser la dérivation qui a déjà eu lieu à droite.

Pour fixer les idées sur les variations que subit la distance du centre de résistance au centre de gravité à mesure que l'inclinaison de l'axe de figure sur la direction du mouvement augmente, nous donnerons le tableau suivant relatif au projectile du canon rayé de 4 français, dont le diamètre est $0^{m},084$ et le poids $3^{k},9$:

Angle que fait l'axe de figure du projectile avec la direction du mouvement du centre de gravité.	*Distance du centre de résistance au centre de gravité.*
degrés	mètres
0	0,039
5	0,031
25	0,013
45	0,003
55	0,000
75	— 0,005 (*)
90	— 0,007.

(*) Le signe négatif indique que le centre de résistance est derrière le centre de gravité.

CHAPITRE IV.

SIMILITUDE DES TRAJECTOIRES.

PROPOSITION 12.

THÉORÈME.

Deux projectiles semblables par la forme et par la constitution intérieure (*), *de différent calibre, lancés par des armes à feu rayées, sous le même angle, dans l'air, décrivent des courbes semblables lorsqu'on a, en même temps :*

1° Les vitesses initiales en raison directe des racines carrées des poids des projectiles, et en raison inverse des dimensions linéaires des projectiles ;

2° Les pas des hélices des deux armes à feu proportionnels aux dimensions linéaires des projectiles.

Ces conditions étant remplies, les dimensions linéaires des deux trajectoires sont en raison directe des poids des projectiles, et en raison inverse des carrés des dimensions linéaires de ceux-ci ; le rapport des vitesses

(*) Nous entendons par là que les deux projectiles sont semblables, non-seulement au point de vue géométrique, mais encore au point de vue de la disposition de la matière, c'est-à-dire que les lignes de l'un des projectiles sont dans un rapport constant avec les lignes homologues de l'autre, et, de plus, que les masses des éléments de l'un sont dans un rapport constant avec les masses des éléments homologues de l'autre. Les deux rapports différeront généralement entre eux.

des projectiles, en des points homologues des deux trajectoires, est le même que le rapport des vitesses initiales; le rapport des temps, employés pour arriver à ces points homologues, est le même que celui des vitesses initiales.

Si l'on remplace les deux courbes à double courbure que décrivent les deux projectiles par deux polygones gauches d'un nombre infini de côtés, afin que les deux courbes soient semblables, il est nécessaire et il suffit que les deux polygones gauches aient les côtés proportionnels et parallèles deux à deux, ou, ce qui revient au même, il est nécessaire et il suffit que les deux polygones gauches aient les côtés homologues proportionnels, et les angles homologues de *contingence* et de *torsion* égaux.

Nous rappellerons que l'angle de *contingence* est l'angle compris entre deux côtés consécutifs, ou, en d'autres termes, l'angle compris entre deux tangentes de la courbe infiniment voisines; que l'angle de *torsion* est l'angle formé par un plan qui contient deux côtés consécutifs avec le plan pareil qui le suit immédiatement, ou, en d'autres termes, l'angle de deux plans *osculateurs* consécutifs.

Soient C et C' les deux courbes; P et P' les poids des deux projectiles semblables; L et L' deux lignes homologues des mêmes projectiles.

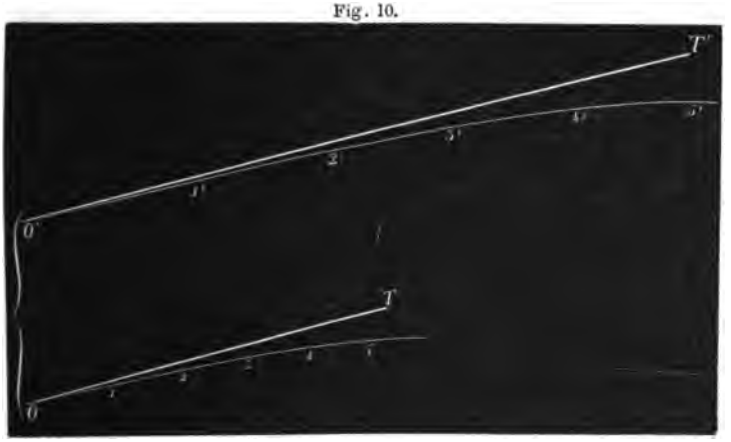
Prenons sur les deux courbes C et C' deux arcs tels, que les temps T et T' nécessaires pour les parcourir soient dans la proportion

$$T : T' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'}.$$

Divisons le temps T en particules infiniment petites t, que nous nommerons des moments, et soient marqués, sur

la courbe C (fig. 10), des points successifs *1*, *2*, *3*, etc., où vient passer d'un moment à l'autre le centre de gravité du projectile P. Joignons les points O, *1*, *2*, *3*, etc., par des droites, et considérons la courbe comme un polygone d'une infinité de côtés.

Fig. 10.



Divisons le temps T' dans le même nombre de parties égales que le temps T. Si l'on désigne par t' une de ces parties, on aura évidemment

$$t : t' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'}.$$

Marquons sur la courbe C' des points successifs *1'*, *2'*, *3'*, etc., où vient passer le projectile P' d'un moment à l'autre.

Considérons maintenant les deux projectiles à l'origine. D'après l'énoncé de la proposition, les deux vitesses initiales u_0, u_0' satisfont à la condition suivante :

$$u_0 : u_0' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'}.$$

Les forces, provenant de la résistance du milieu contre les deux projectiles, que nous supposerons parallèles à l'origine, sont évidemment entre elles comme les carrés des vitesses et comme les aires des surfaces sur lesquelles s'exerce la résistance de l'air, c'est-à-dire comme

$$L^2 u_0^2 : L'^2 u_0'^2 ;$$

et les accélérations qu'elles produisent sont entre elles comme

$$\frac{L^2 u_0^2}{P} : \frac{L'^2 u'^2_0}{P'}.$$

Si l'on a égard au rapport précédent des deux vitesses initiales u_0, u_0', on voit que ces deux accélérations sont égales.

Outre la résistance du milieu, les deux projectiles sont soumis à la pesanteur; mais ici, de même, les accélérations produites par cette force sont égales pour les deux projectiles.

Il est de plus évident que, si les directions du mouvement à l'origine des deux projectiles sont parallèles, les deux accélérations d'un projectile, provenant de la résistance du milieu et de la pesanteur, sont respectivement parallèles et dirigées dans le même sens que les accélérations de l'autre projectile. Il en résulte qu'à l'origine les deux projectiles ont des accélérations totales égales en intensité et en direction.

Soit f l'accélération totale commune, m l'angle qu'elle fait avec la direction du mouvement à l'origine.

Au bout du temps infiniment petit t, la vitesse sur la courbe C au point 1 sera

$$u_1 = u_0 + ft \cos m ,$$

et la vitesse sur la courbe C' au point $1'$, après le temps t', sera

$$u_1' = u'_0 + ft' \cos m.$$

Or, nous avons

$$u_0 : u'_0 :: t : t' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'};$$

on en déduit

$$u_1 : u_1' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'};$$

c'est-à-dire que les vitesses aux points 1 et $1'$ sont dans le même rapport qu'aux points O et O'.

La longueur du côté $O1$ sur la courbe C s'obtiendra en multipliant la demi-somme des vitesses aux deux extrémités par le temps t; en sorte qu'on aura pour son expression

$$u_0 t + \tfrac{1}{2} ft^2 \cos m.$$

On aura de même, pour la longueur du côté $O'1'$ de la courbe C',

$$u'_0 t' + \tfrac{1}{2} ft'^2 \cos m.$$

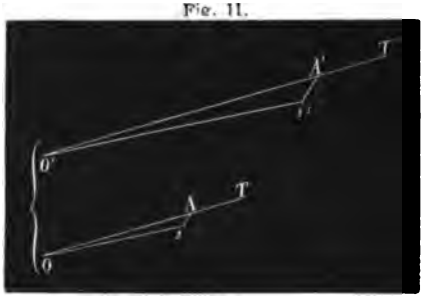
En ayant égard au rapport de u_0 à u_0', et de t à t', on déduira que les deux côtés sont entre eux comme

$$\frac{P}{L^2} : \frac{P'}{L'^2}.$$

Il nous faut maintenant prouver que les angles de contingence et de torsion des deux courbes sont respectivement égaux deux à deux.

Soit OT (fig. 11) la direction de la vitesse initiale u_0, ou de la tangente à la courbe C au point O. Prenons sur OT une droite OA égale à $u_0 t$, c'est-à-dire à l'espace qui serait décrit par le mobile dans le moment t, en vertu seulement de la vitesse u_0.

Fig. 11.



Joignons A au point 1. Le côté $A1$ du triangle $OA1$ sera égal à l'espace

$$\tfrac{1}{2} f t^2$$

que ferait parcourir au mobile pendant le temps t, suivant sa direction, la force qui le sollicite, indépendamment de la vitesse u_0. Le côté $O1$ est l'espace que parcourt réellement le mobile, et nous avons vu ci-dessus qu'il est égal à

$$u_0 t + \tfrac{1}{2} f t^2 \cos m.$$

Nous avons donc

$$OA = u_0 t,$$

$$A1 = \tfrac{1}{2} f t^2,$$

$$O1 = u_0 t + \tfrac{1}{2} f t^2 \cos m.$$

Si l'on fait la même construction relativement à l'autre courbe C', on aura un autre triangle $O'A'1'$, où

$$O'A' = u_0' t'$$

$$A'1' = \tfrac{1}{2} f t'^2$$

$$O'1' = u_0' t' + \tfrac{1}{2} f t'^2 \cos m.$$

En ayant égard au rapport de u_0 à u_0' et de t à t', on voit que les côtés des deux triangles sont proportionnels; donc, ils sont équiangles, et les deux angles de contingence $A\,O\,1$, $A'\,O'\,1'$, sont égaux; de sorte que, si les deux tangentes à l'origine sont parallèles, les deux côtés $O\,1$, $O'\,1'$ le seront aussi.

De plus, les accélérations des deux projectiles étant parallèles, il s'ensuit que le plan qui contient la tangente à l'origine et le premier côté $O\,1$ d'un polygone sera parallèle au plan homologue de l'autre polygone.

Le projectile P étant arrivé au point 1, sur la courbe C, pour avoir la position de son axe dans l'espace en ce point il faut, d'après ce qu'on a vu dans la Proposition 10, le faire tourner autour du côté $O\,1$ de l'angle

$$\frac{v\,t}{V \sin a}.$$

De même sur la courbe C', au point homologue $1'$, il faut faire tourner le projectile P' autour du côté $O'\,1'$ de l'angle

$$\frac{v'\,t'}{V' \sin a}.$$

Les deux vitesses angulaires v et v' sont en raison directe des résistances estimées suivant la normale à l'axe de figure du projectile, en raison directe des distances du centre de résistance au centre de gravité, et en raison inverse des moments d'inertie des deux projectiles.

A cause de la similitude géométrique des deux projectiles, les résistances seront proportionnelles aux carrés des

dimensions linéaires; elles seront, en outre, proportionnelles aux carrés des vitesses; de sorte qu'on aura

$$v : v' :: \frac{L^2 u_0^2 D}{I} : \frac{L'^2 u'^2_0 D'}{I'},$$

où D, D', désignent pour chaque projectile la distance du centre de résistance au centre de gravité; I, I', les moments d'inertie par rapport à l'axe de figure.

Nous avons supposé que les deux projectiles étaient semblables non-seulement au point de vue géométrique, mais encore par leur constitution intérieure; c'est-à-dire nous avons supposé les deux projectiles comme formés d'un même nombre de molécules semblablement disposées et possédant des masses dans le rapport de P à P'. Dès lors, on aura les proportions

$$D : D' :: L : L',$$

$$I : I' :: PL^2 : P'L'^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{D}{I} : \frac{D'}{I'} :: \frac{1}{PL} : \frac{1}{P'L'};$$

et par suite

$$v : v' :: \frac{Lu_0^2}{P} : \frac{L'u'^2_0}{P'}.$$

En vertu de la relation entre u_0 et u'_0, il vient

$$v : v' :: \frac{1}{L} : \frac{1}{L'}.$$

Et puisqu'on a

$$t : t' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'},$$

on obtiendra

$$vt : v't' :: \frac{\sqrt{P}}{L^2} : \frac{\sqrt{P'}}{L'^2}.$$

La vitesse initiale de rotation V, ainsi qu'on l'a déjà remarqué dans la Proposition 11, est en raison directe de la vitesse de projection et en raison inverse du pas de l'hélice de l'arme; donc, on aura

$$V : V' :: \frac{u_0}{p} : \frac{u_0'}{p'},$$

p et p' étant les pas des rayures.

D'après l'énoncé de la proposition, on a

$$u_0 : u_0' :: \frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'},$$

$$p : p' :: L \,.\, L';$$

il en résulte

$$V : V' :: \frac{\sqrt{P}}{L^2} : \frac{\sqrt{P'}}{L'^2}.$$

Nous avons obtenu la même proportion entre vt et $v't'$; nous aurons donc l'équation

$$\frac{vt}{V \sin a} = \frac{v't'}{V' \sin a}.$$

On en conclut que les axes des deux projectiles aux points *1* et *1'* tourneront de la même quantité angulaire, et prendront une direction parallèle.

D'où l'on voit qu'aux points *1* et *1'*, les deux projectiles sont dans les mêmes conditions, sous le rapport de la direction et de la vitesse, qu'aux points *O* et *O'*.

En répétant aux points *1* et *1'*, considérés comme de nouvelles origines, le même raisonnement qu'aux points *O* et *O'*, on trouvera que le second côté de la courbe *C* est proportionnel et parallèle au côté homologue de la courbe *C'*, et, de plus, que le plan qui contient le premier et le second côté de la courbe *C* est parallèle au plan homologue de la courbe *C'*, et, par suite, que l'angle de torsion est égal dans les deux courbes.

En raisonnant ainsi d'un côté au côté suivant, on peut conclure que les deux polygones ont les côtés homologues proportionnels et parallèles, et que, par suite, les deux courbes *C* et *C'* sont semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

Le rapport de similitude linéaire entre les deux courbes est égal au rapport des côtés homologues, c'est-à-dire égal à

$$\frac{P}{L^2} : \frac{P'}{L'^2}.$$

Le rapport des temps nécessaires pour parcourir des arcs semblables est

$$\frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'}.$$

Le rapport des vitesses en des points homologues est

$$\frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'}.$$

CONSÉQUENCE 1.

Si les deux projectiles ont le même poids spécifique, on aura

$$P : P' :: L^3 : L'^3.$$

Dès lors, le rapport de similitude linéaire entre les deux trajectoires devient

$$L : L';$$

le rapport des temps, ainsi que celui des vitesses,

$$\sqrt{L} : \sqrt{L'}.$$

On peut, en conséquence, énoncer le théorème suivant :

Les armes à feu rayées de calibre différent, dont le pas est proportionnel au calibre, fournissent des trajectoires semblables toutes les fois qu'elles lancent, sous la même élévation, des projectiles semblables, de même poids spécifique, avec des vitesses proportionnelles aux racines carrées des calibres. Dans ce cas, le rapport de similitude linéaire entre les deux trajectoires sera égal au rapport des calibres ; le rapport des temps, ainsi que celui des vitesses, sera égal au rapport des racines carrées des calibres.

CONSÉQUENCE 2.

Si l'on a

$$L = L',$$

les deux projectiles seront égaux quant à la forme extérieure; alors le pas doit être égal de part et d'autre pour qu'il y ait similitude. Dans ce cas, le rapport de similitude des longueurs entre les deux trajectoires sera égal à

$$P : P';$$

celui des temps, ainsi que celui des vitesses, sera

$$\sqrt{P} : \sqrt{P'}.$$

De là, il suit que, *dans la même arme à feu rayée, les trajectoires, qui résultent de divers projectiles de même forme extérieure et de poids différent, seront semblables, si ceux-ci sont lancés, sous le même angle, avec des vitesses proportionnelles aux racines carrées de leurs poids.*

CONSÉQUENCE 3.

Si l'on a la proportion

$$L : L' :: P : P',$$

le rapport des temps, ainsi que celui des vitesses, devient

$$\frac{1}{\sqrt{P}} : \frac{1}{\sqrt{P'}};$$

et celui des dimensions linéaires des trajectoires

$$\frac{1}{P} : \frac{1}{P'}.$$

Remarquons que, si l'on admet les lois usuelles entre les vitesses initiales et les charges de poudre, d'après lesquelles les vitesses initiales sont égales, dans deux armes à feu différentes, pour le même rapport entre le poids de la charge et celui du projectile, et, dans la même arme, les vitesses initiales sont entre elles comme les racines carrées des charges et inverses des racines carrées des poids du boulet, il est aisé de voir que les deux vitesses initiales, dans le rapport de

$$\frac{1}{\sqrt{P}} : \frac{1}{\sqrt{P'}},$$

seront produites par deux charges égales.

Par conséquent, *les armes à feu rayées, dont le pas est proportionnel au calibre, qui lancent des projectiles semblables, de poids proportionnel au calibre, donnent des trajectoires semblables, lorsqu'on les tire avec la même charge de poudre, sous la même inclinaison.*

CONSÉQUENCE 4.

Si l'on a

$$L^2 : L'^2 :: P : P',$$

la similitude se change en égalité, et les deux trajectoires sont superposables. Ce qui nous conduit au théorème suivant :

Sous la même inclinaison, et avec la même vitesse initiale, le même tir est fourni par toutes les armes à feu rayées, assujetties à la condition que le pas des

hélices et le calibre soient proportionnels à la racine carrée du poids du projectile, ou, ce qui revient au même, assujetties à la condition que le pas et le calibre soient réciproquement proportionnels au poids spécifique du projectile; les projectiles étant d'ailleurs semblables.

CONSÉQUENCE 5.

Si les projectiles ne possèdent aucune rotation initiale, c'est-à-dire si l'on a

$$V=0,\ V'=0,$$

il est aisé de voir, en reprenant la démonstration du théorème général, que la similitude des trajectoires aura lieu lorsque les distances du centre de résistance au centre de gravité sont entre elles comme

$$\frac{L^4}{P} : \frac{L'^4}{P'}.$$

Pour satisfaire à cette condition, il est nécessaire qu'on ait la proportion

$$P : P' :: L^3 : L'^3;$$

car les deux projectiles étant semblables par la disposition des molécules, les distances du centre de résistance au centre de gravité sont dans le rapport de

$$L : L'.$$

Donc, *deux projectiles semblables, lancés sous le même angle, sans rotation initiale, décrivent des trajectoires semblables, si leurs poids sont proportionnels à la troisième puissance des diamètres, et si leurs vitesses de projection sont proportionnelles à la racine carrée des diamètres. Dans ce cas, les dimensions linéaires des trajectoires sont proportionnelles aux diamètres.*

Ce théorème se rapporte au cas du tir des projectiles excentriques, dans les armes à feu lisses, lorsqu'on place la ligne qui en contient les centres de gravité et de figure dans la direction de l'axe de la pièce.

CONSÉQUENCE 6.

Si les centres de gravité et de résistance se confondent, dans toutes les positions que peut prendre le projectile, la résistance du milieu n'aura aucune influence sur le mouvement de rotation, qui dépendra uniquement de la rotation initiale; alors, pour que les trajectoires soient semblables, il suffit que les projectiles soient semblables et que les vitesses initiales soient dans la proportion de

$$\frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'}.$$

Les boulets sphériques homogènes satisfont complètement aux conditions de similitude et de coïncidence des deux centres; de sorte qu'ils décriront des trajectoires semblables lorsque, étant lancés sous le même angle d'élévation, les vitesses initiales sont comme

$$\frac{\sqrt{P}}{L} : \frac{\sqrt{P'}}{L'},$$

ou bien comme

$$\sqrt{L\Pi} : \sqrt{L'\Pi'},$$

Π et Π' étant les poids spécifiques des projectiles.

On tombe ainsi sur le théorème que les Français attribuent à Borda et les Anglais a Robison, théorème qui se trouve évidemment compris, comme cas particulier, dans le nôtre.

REMARQUE.

Il est bon de remarquer qu'à l'aide du théorème général que nous venons d'établir, on peut, du tir d'une seule arme à feu, déduire des règles pour le tir de toute autre arme. En effet, supposons qu'on possède les tables de tir d'un canon rayé, par exemple du canon de 3^k, tiré sous toutes les inclinaisons, avec toutes les charges praticables et avec tous les pas de rayure.

Soit maintenant proposé un autre canon rayé, par exemple le canon de 6^k, il sera aisé de trouver sur-le-champ la table de tir de ce canon. A cet effet, on déterminera d'abord quelle est la charge et le pas du canon de 3^k, qui fournissent des trajectoires semblables aux trajectoires du canon de 6^k, en ayant égard à la condition que les deux vitesses initiales soient dans le rapport des racines carrées des calibres, et les deux pas dans le rapport des calibres. Cela fait, il suffira, pour chaque angle de projection, de multiplier par le rapport des calibres la portée, la dérivation, la hauteur du tir, etc. du canon de 3^k, pour avoir la portée, la dérivation, etc., correspondantes du canon de 6^k.

D'où l'on voit qu'en se servant de ce théorème, on n'aura besoin que de simples proportions pour déduire d'une série d'expériences convenables, exécutées avec un seul canon

rayé, ou même avec un seul fusil rayé, les tables de tir d'un canon rayé ou d'une carabine quelconque. C'est pourquoi nous croyons ce théorème digne de remarque, et nous nous permettons d'appeler sur lui l'attention des artilleurs.

NOTE

SUR LE CENTRE DE RÉSISTANCE D'UN CYLINDRE DROIT.

Nous avons admis, dans la Proposition 8 et suivantes, que la résultante de toutes les actions élémentaires exercées par le milieu résistant sur la surface d'un cylindre droit, passe constamment par le milieu de son axe de figure. Mais peut-être en pratique le centre de résistance ne coïncide-t-il point avec le centre de figure.

En effet, nous trouvons, dans le mémoire de M. Magnus, *Sur la déviation due au mouvement de rotation des projectiles*, qu'ayant soumis à un courant d'air horizontal un cylindre équilatère droit, suspendu à son centre de gravité, dont l'axe était dans la direction du centre du courant, mais légèrement incliné à l'horizon, il est arrivé que le cylindre prenait toujours la position horizontale. D'où l'on doit conclure que la résultante de la pression exercée par le courant contre le cylindre passait par la partie de l'axe de ce corps située en arrière du centre de gravité, ou, en d'autres termes, par la partie de cet axe du côté postérieur du cylindre.

Nous nous expliquons ce fait par les expériences du professeur Avanzini (*), sur le centre de pression ou de résistance dans le choc oblique d'une veine fluide. D'après

(*) *Nuove ricerche sulla resistenza de' fluidi* (*Istituto nazionale italiano*, tomo I, parte 1ª).

ces expériences, lorsqu'un plan est mû obliquement dans un fluide, le centre de résistance n'est point au centre de figure de la surface ; mais il se transporte vers le côté de la plaque le plus avancé dans la direction du mouvement, et la distance des deux centres est :

1° D'autant plus grande que l'angle d'incidence est plus aigu ;

2° D'autant plus petite que la vitesse est plus grande ;

3° D'autant plus petite que la plaque est plus longue et plus étroite.

Cela posé, on voit que, dans l'expérience de M. Magnus, le centre de résistance de la base plane du cylindre, exposé au courant, au lieu de tomber à son centre, sera plus près du bord le plus avancé ; de telle sorte que le cylindre devra être ramené à l'horizontalité.

Mais si ce phénomène est sensible, dans le cas de médiocres vitesses, il le sera beaucoup moins, pour des vitesses aussi grandes que celles qui sont imprimées par la poudre ; car, d'après les expériences de M. Avanzini, la distance du centre de résistance au centre de figure est d'autant plus petite que la vitesse est plus grande.

Cela, au reste, ne modifie en rien la marche que nous avons indiquée pour tracer ou calculer par points la trajectoire des projectiles lancés par les armes à feu rayées, car nous y supposons que la résistance oblique exercée contre le projectile ait été déterminée à l'aide de l'expérience, laquelle tient implicitement compte de toutes les causes connues ou inconnues, qui influent sur le phénomène.

DU MOUVEMENT

DES

PROJECTILES QUELCONQUES.

DU MOUVEMENT

DES PROJECTILES QUELCONQUES.

PRÉFACE.

Les deux mémoires qui suivent regardent le tir des projectiles quelconques.

Les résultats, auxquels je suis parvenu dans le premier, n'avaient encore été indiqués par personne avant moi. A ce propos, on me pardonnera de transcrire ici, bien moins pour en tirer vanité, que comme témoignage d'une amitié qui m'est précieuse, la lettre que M. le Général Ménabréa m'écrivit, en recevant ce mémoire :

« Turin, 15 septembre 1861.

« Mon cher de St-Robert,

« J'ai lu votre beau mémoire sur la similitude des trajectoires; « je vous félicite sincèrement pour les importants résultats auxquels « vous êtes parvenu d'une manière aussi simple qu'élégante.

« Vos Théorèmes ont désormais leur place marquée dans la « Théorie de la Balistique.

« Je vous remercie de votre souvenir et vous prie de croire « aux sentimens affectueux

de votre sincère ami

L. F. MÉNABRÉA. »

Dans le second mémoire, je traite d'une question qui a formé le sujet d'un savant mémoire de Poisson (*). Tout en professant la plus grande admiration pour son travail, il me semble que, dans toute sa laborieuse analyse, on ne voit guère que des formules et qu'on ne s'y forme aucune image nette du phénomène. C'est pourquoi j'ai pensé qu'il pourrait être utile de chercher une solution de la question en employant les méthodes propres à Poinsot, à l'aide desquelles, on peut suivre le phénomène, pour ainsi dire, avec les yeux de la pensée. C'est ce que j'ai essayé de faire dans ce mémoire écrit en 1858. Le lecteur jugera si j'ai réussi.

Turin, avril 1872.

(*) *Mémoire sur le mouvement des projectiles dans l'air, en ayant égard à la rotation de la terre*, dans le *Journal de l'École Polytechnique*, 26e cahier. Paris, 1838.

THÉORÈME

SUR LA

SIMILITUDE DES TRAJECTOIRES

que décrivent les projectiles dans les milieux résistants.

APPLICATIONS AU TIR DES ARMES A FEU.

(Mémoire inséré dans le *Nuovo Cimento*, vol. XIII, livr. de mai et juin. Pise, 1861. Traduit en 1872).

THÉORÈME

Deux projectiles quelconques, qui se meuvent dans des milieux différents, dont la résistance est en raison composée du carré de la vitesse, de l'aire de la surface sur laquelle la résistance s'exerce et de la densité du milieu, décrivent des trajectoires semblables, lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1° *Que les deux projectiles sont semblables, tant par la forme extérieure que par la constitution interne ;*

2° *Que, sur chacune des deux trajectoires, il existe un point où la direction de la vitesse du centre de gravité est la même, où les deux projectiles sont disposés*

parallèlement et où leurs axes instantanés de rotation sont parallèles;

3° *Que, dans ces points homologues, les vitesses des centres de gravité des projectiles sont proportionnelles aux racines carrées de leurs dimensions linéaires;*

4° *Que, dans ces mêmes points, les vitesses angulaires de rotation des projectiles sont réciproquement proportionnelles aux racines carrées de leurs dimensions linéaires;*

5° *Que les densités des projectiles sont proportionnelles aux densités des milieux résistants.*

Ces conditions étant remplies, on aura:

1° *Les vitesses des projectiles dans les points homologues des deux trajectoires et les temps nécessaires pour y arriver, proportionnels aux racines carrées des dimensions linéaires des projectiles;*

2° *Les dimensions linéaires des deux trajectoires proportionnelles aux dimensions linéaires des projectiles.*

Afin que les trajectoires décrites par deux projectiles soient semblables, il est nécessaire et suffisant que les deux polygones d'un nombre infini des côtés qu'on peut leur substituer, aient leurs côtés infiniment petits proportionnels et parallèles deux à deux.

Désignons par λ le rapport des dimensions linéaires des deux projectiles semblables; par μ le rapport des densités de leurs molécules semblablement situées; par δ le rapport des densités des milieux résistans; par υ le rapport des vitesses de translation des deux projectiles dans les points correspondants des deux trajectoires; par ρ le rapport des vitesses angulaires de rotation des projectiles dans ces points; par τ le rapport des temps nécessaires pour parcourir des

arcs semblables des deux trajectoires; par σ le rapport des dimensions linéaires des deux trajectoires.

Considérons les projectiles dans les deux points des trajectoires, où les deux tangentes sont parallèles, et où les projectiles sont disposés parallèlement, et ont les axes instantanés de rotation parallèles.

Toutes les forces qui sollicitent un projectile, provenant de la gravité et de la résistance du milieu, peuvent se réduire à deux forces P (poids) et R (résistance) appliquées au centre de gravité et à un couple S qui diffère en général de zéro. Ce couple est nul seulement dans le cas particulier, où toutes les actions élémentaires, exercées par le milieu sur la surface du projectile, se composent en une résultante unique, passant par le centre de gravité.

Vu la similitude des projectiles, les forces qui sollicitent le second projectile seront égales à

$$\lambda^3 \mu P, \quad \lambda^2 v^2 \delta R;$$

et le couple sera représenté par

$$\lambda^3 v^2 \delta S.$$

Si g est l'accélération due au poids, l'accélération imprimée par la résistance sera

$$\frac{gR}{P},$$

pour le premier projectile; et

$$\frac{v^2 \delta}{\lambda \mu} \cdot \frac{gR}{P}$$

pour le second projectile.

Si l'on pose

$$[1] \qquad \frac{\upsilon^2 \delta}{\lambda \mu} = 1,$$

les deux forces qui sollicitent un projectile produiront des accélérations égales à celles qui sont imprimées à l'autre.

Les deux projectiles étant semblablement situés, il est clair qu'en ce cas leurs accélérations sont égales, non-seulement en intensité, mais encore en direction.

Si l'on désigne par f la résultante des accélérations pour chaque projectile; par φ l'angle que sa direction fait avec la tangente à la trajectoire; par u_0 la vitesse du centre de gravité au point de la trajectoire que nous considérons, point auquel nous donnerons le nom d'origine; par u_1 la vitesse à l'extrémité du premier côté infiniment petit parcouru dans le temps infiniment court dt; par ds la longueur de ce côté infiniment petit, on aura pour un projectile,

$$u_1 = u_0 + f \cos \varphi \, dt,$$

$$ds = u_0 dt + \tfrac{1}{2} f \cos \varphi \, dt^2.$$

Et pour l'autre projectile

$$u_1' = \upsilon u_0 + \tau f \cos \varphi dt,$$

$$ds' = \upsilon \tau u_0 dt + \tfrac{1}{2} \tau^2 f \cos \varphi \, dt^2.$$

Si nous posons

$$[2] \qquad \tau = \upsilon,$$

nous aurons

$$\frac{u_1'}{u_1} = \upsilon, \qquad \frac{ds'}{ds} = \upsilon^2.$$

En sorte que, si la condition exprimée par l'équation [2] est satisfaite, les vitesses des projectiles à l'extrémité du premier petit côté seront dans le même rapport qu'à l'origine.

Considérons maintenant le triangle infinitésimal formé : 1° par la ligne droite $u_0 dt$, que décrirait le projectile sur la tangente dans le temps dt, en vertu de la vitesse u_0 ; 2° par la ligne droite

$$\tfrac{1}{2} f dt^2,$$

que décrirait le projectile dans le même temps dt, en vertu de l'accélération f, si la vitesse u_0 n'existait pas ; 3° par la droite ds, dont la valeur est donnée par l'équation

$$ds = u_0 dt + \tfrac{1}{2} f \cos\varphi \, dt^2.$$

Le triangle infinitésimal correspondant sur la trajectoire que décrit le second projectile, aura pour côtés

$$\upsilon\tau u_0 dt,$$

$$\tfrac{1}{2}\tau^2 f dt^2,$$

$$\sigma ds = \upsilon\tau u_0 dt + \tfrac{1}{2}\tau^2 f \cos\varphi \, dt^2.$$

Pour trouver l'effet du couple S, qu'on résolve ce couple en trois autres

$$S\cos\alpha, \qquad S\cos\beta, \qquad S\cos\gamma,$$

selon les trois axes principaux du projectile. En appelant A, B, C les trois moments d'inertie par rapport à ces trois axes, nous aurons

$$\frac{dp}{dt} = \frac{S\cos\alpha}{A},$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{S\cos\beta}{B},$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{S\cos\gamma}{C},$$

pour les trois accélérations angulaires que ces couples tendent à produire autour des mêmes axes.

Les trois rotations p, q, r, autour des trois axes principaux, équivalent à une rotation unique

$$\theta = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

autour d'un axe qui fait, avec les trois premiers, les angles l, m, n, donnés par les équations

$$\cos l = \frac{p}{\theta},$$

$$\cos m = \frac{q}{\theta},$$

$$\cos n = \frac{r}{\theta}.$$

Pour un autre projectile, semblable quant à la disposition et à la masse de ses points matériels, le couple, provenant de la résistance du milieu, sera

$$\lambda^3 v^2 \delta S;$$

et les moments d'inertie des axes principaux seront

$$\lambda^5 \mu A,$$

$$\lambda^5 \mu B,$$

$$\lambda^5 \mu C.$$

En introduisant ces valeurs dans les équations précédentes, les trois rotations autour des axes principaux, pour le second projectile, deviendront

$$\frac{v^2 \delta \tau}{\lambda^2 \mu} p,$$

$$\frac{v^2 \delta \tau}{\lambda^2 \mu} q,$$

$$\frac{v^2 \delta \tau}{\lambda^2 \mu} r;$$

et leur résultante sera égale à

$$\frac{v^2 \delta \tau}{\lambda^2 \mu} \theta,$$

qui fera avec les trois axes principaux les angles dont les cosinus sont

$$\frac{p}{\theta},$$

$$\frac{q}{\theta},$$

$$\frac{r}{\theta}.$$

Donc les angles, que fait avec les axes principaux l'axe instantané de la rotation engendrée par la résistance du milieu, ne varient point, en passant d'un projectile à un autre semblable.

Imaginons maintenant que la vitesse angulaire infiniment petite $d\theta$, que le couple S tend à faire naître au premier instant, se compose avec la vitesse angulaire finie du projectile que nous appellerons ω: la diagonale du parallélogramme construit sur les deux droites, qui représentent ces vitesses angulaires $d\theta$ et ω, représentera en direction et en intensité la vitesse de rotation après le temps dt.

A l'origine les axes des rotations finies ω et ω' des deux projectiles sont, par hypothèse, parallèles, ainsi que les axes des rotations infiniment petites $d\theta$ et $d\theta'$, d'après la démonstration précédente; ce qui fait, qu'après le temps dt, les axes instantanés de rotation des deux projectiles seront encore parallèles, si les vitesses angulaires ω et $d\theta$ de l'un sont proportionnelles aux vitesses angulaires ω' et $d\theta'$ relatives à l'autre; c'est-à-dire, si l'on a

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Si l'équation [2] est satisfaite, les trois côtés du second triangle seront dans le même rapport, exprimé par υ^2, ou bien par τ^2, avec les trois côtés du premier : ils sont donc équiangles ; d'où il résulte que, si les directions des vitesses à l'origine sont parallèles, les deux côtés des courbes seront aussi parallèles et le rapport de leurs longueurs sera égal à

[3] $$\sigma = \upsilon^2 = \tau^2.$$

Remarquons en outre, que les deux accélérations totales imprimées aux projectiles étant parallèles, les plans de ces triangles, ou, en d'autres termes, les plans osculateurs des deux courbes seront aussi parallèles.

Si le couple S était toujours nul, les deux projectiles, arrivés à l'extrémité du premier côté, y conserveraient encore leur parallélisme, et s'y trouveraient entièrement dans les mêmes conditions qu'au commencement du côté.

En répétant, pour le second côté, le raisonnement fait pour le premier, on conclurait qu'il est proportionnel et parallèle dans les deux courbes. Et ainsi de suite. Donc dans ce cas, les deux courbes seraient semblables, si les équations [1] et [2] étaient satisfaites. Mais, dans le cas général, le mouvement de rotation dû à l'existance du couple S, introduit de nouvelles conditions à remplir pour rendre les deux trajectoires semblables : ce sont ces conditions que nous allons examiner.

Le couple S produit, en un temps infiniment petit dt, une vitesse angulaire de rotation infiniment petite, qui s'ajoute à la vitesse angulaire actuelle du projectile.

Et puisque

$$\frac{\omega'}{\omega} = \rho ,$$

on devra avoir

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \rho .$$

Pour obtenir la valeur de la vitesse angulaire naissante $d\theta$, multiplions respectivement par p, q, r les valeurs trouvées ci-dessus de $\frac{dp}{dt}$, $\frac{dq}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ et additionnons les produits, il en résultera

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} = S\left(\frac{p\cos\alpha}{A} + \frac{q\cos\beta}{B} + \frac{r\cos\gamma}{C}\right).$$

Or, comme

$$p^2 + q^2 + r^2 = \theta^2 ,$$

on en déduit

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} + r\frac{dr}{dt} = \theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Donc on aura

$$\frac{d\theta}{dt} = S\left(\frac{p\cos\alpha}{\theta A} + \frac{q\cos\beta}{\theta B} + \frac{r\cos\gamma}{\theta C}\right),$$

ou bien, en introduisant les angles l, m, n,

$$\frac{d\theta}{dt} = S\left(\frac{\cos\alpha\cos l}{A} + \frac{\cos\beta\cos m}{B} + \frac{\cos\gamma\cos n}{C}\right).$$

Pour un autre projectile semblable, on aura

$$\frac{d\theta'}{dt'} = \frac{v^2\delta}{\lambda^2\mu} \cdot \frac{d\theta}{dt};$$

et comme le rapport des temps est τ, il vient

$$\frac{d\theta'}{d\theta} = \frac{v^2\delta\tau}{\lambda^2\mu}.$$

Donc, afin que les axes instantanés de rotation, parallèles à l'origine, soient encore tels après le temps dt, on devra avoir

[4] $$\rho = \frac{v^2\delta\tau}{\lambda^2\mu}.$$

Pendant ce temps dt, un projectile tournera autour de son axe instantané de rotation d'un angle égal à

$$\tfrac{1}{2} d\theta\, dt,$$

et le second d'un angle

$$\tfrac{1}{2} d\theta'\, dt'.$$

Pour que ces angles soient égaux, il faut qu'on ait leur rapport

$$\frac{d\theta'}{d\theta} \cdot \frac{dt'}{dt} = 1;$$

d'où il résulte

$$\frac{v^2\delta\tau^2}{\lambda^2\mu} = 1.$$

En ayant égard à l'équation [4], cette condition se transforme dans la suivante

$$\rho\tau = 1. \qquad [5]$$

Si cette condition est remplie, les deux projectiles, parallèles à l'origine, seront encore tels après le temps dt, parce qu'ils auront tourné du même angle autour d'axes parallèles.

Mais le couple provenant de la résistance du milieu n'est pas le seul qui tende à modifier la rotation du projectile : en effet, il naît, à chaque instant, par la rotation même, un couple dû aux forces centrifuges des divers points du corps, qui vient troubler la rotation, et en changer l'axe à chaque instant.

On sait que l'axe de ce couple est à la fois perpendiculaire à l'axe instantané et à l'axe du couple qui produit la rotation actuelle ω: et que la grandeur de ce couple K est exprimée par

$$K = G\omega \sin i,$$

i étant l'inclinaison de l'axe de la rotation ω sur l'axe du couple G d'impulsion (*).

Or, le facteur

$$G \cos i,$$

qui n'est autre que le couple G résolu selon l'axe de la rotation ω, est évidemment égal à

$$I\omega,$$

(*) Poinsot, *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

en appelant I le moment d'inertie du mobile autour de l'axe instantané de la rotation ω.

Nous avons donc

$$K = I\omega^2 \operatorname{tang} i.$$

On sait que

$$I = A\cos^2 a + B\cos^2 b + C\cos^2 c,$$

où a, b, c, expriment les inclinaisons respectives de l'axe de la rotation ω sur les trois axes principaux.

Si l'on désigne par α', β', γ', les trois angles faits avec les axes principaux par l'axe du couple K provenant des forces centrifuges; par l', m', n', les angles faits avec les axes principaux par l'axe de la rotation κ que produit le couple K, l'accélération angulaire que produit le couple K sera, ainsi qu'on l'a vu ci-dessus,

$$\frac{d\kappa}{dt} = K\left(\frac{\cos\alpha'\cos l'}{A} + \frac{\cos\beta'\cos m'}{B} + \frac{\cos\gamma'\cos n'}{C}\right);$$

ou bien, en remplaçant K par sa valeur trouvée plus haut,

$$\frac{d\kappa}{dt} = \omega^2 \operatorname{tang} i\,(A\cos^2 a + B\cos^2 b + C\cos^2 c)$$

$$\left(\frac{\cos\alpha'\cos l'}{A} + \frac{\cos\beta'\cos m'}{B} + \frac{\cos\gamma'\cos n'}{C}\right).$$

Si l'on prend deux droites, l'une ω représentant la vitesse de rotation actuelle, l'autre $d\kappa$ représentant la vitesse de rotation engendrée par le couple K en un instant dt, et si

l'on construit sur elles un parallélogramme, la diagonale représentera l'axe et la grandeur de la vitesse de rotation après le temps dt.

Or, afin que les axes instantanés de rotation des deux projectiles conservent leur parallélisme après le temps dt, il faut avoir

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\kappa'}{d\kappa}.$$

Eu égard à la manière dont est composée la valeur de $d\kappa$, il est aisé de voir que l'on a

$$\frac{d\kappa'}{d\kappa} = \frac{\omega'^2\tau}{\omega^2}.$$

Il faut donc qu'on ait

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\omega'^2}{\omega^2}\tau = \rho.$$

Par conséquent

$$\rho\tau = 1,$$

condition identique à celle que nous avons déjà trouvée.

En outre, pour que les deux projectiles soient encore parallèles après le temps dt, il faut qu'ils tournent autour de leurs axes d'angles égaux, c'est-à-dire il faut qu'on ait

$$\tfrac{1}{2}\, d\kappa\, dt = \tfrac{1}{2}\, d\kappa' dt' = \tfrac{1}{2}\,\tau\, d\kappa' dt,$$

ou bien

$$\frac{d\kappa'}{d\kappa} = \frac{1}{\tau}.$$

Or, nous avons trouvé plus haut

$$\frac{d\kappa'}{d\kappa} = \frac{\omega'^2}{\omega^2}\tau = \rho^2\tau ;$$

par conséquent, afin que les deux projectiles soient parallèles après le temps dt, il faut qu'on ait

$$\rho^2\tau = \frac{1}{\tau};$$

d'où l'on tire

$$\rho\tau = 1,$$

condition qui ne diffère point de la précédente.

Donc, le couple provenant des forces centrifuges ne trouble pas le parallélisme des projectiles, si la condition [5] est remplie.

Au commencement du second côté infiniment petit, les deux projectiles se trouvent dans des conditions identiques à celles où ils étaient au commencement du premier. Si l'on applique donc le même raisonnement au second, on verra que les deux seconds côtés des deux trajectoires sont aussi proportionnels et parallèles. Ainsi de suite pour le troisième, le quatrième, etc.

En conclusion, les deux projectiles décrivent des trajectoires semblables, lorsqu'on a tout à la fois

$$\frac{v^2\delta}{\lambda\mu} = 1,$$

$$\tau = v,$$

$$\rho = \frac{v^2\delta\tau}{\lambda^2\mu},$$

$$\rho\tau = 1.$$

D'où l'on tire

$$\upsilon = \tau = \sqrt{\lambda},$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\delta = \mu ;$$

ce qu'il fallait démontrer.

En vertu de l'équation [3], on aura pour le rapport linéaire de similitude des deux trajectoires

$$\sigma = \lambda.$$

Ier Corollaire.

Si les projectiles sont des corps de révolution, et s'ils tournent à l'origine avec une très-grande vitesse autour d'un axe très-voisin de l'axe de figure, on sait que l'axe instantané de rotation restera, dans tout le cours du mouvement, très-près de l'axe de figure.

Cela posé, vu la forme de révolution des projectiles, la résistance du milieu sera toujours semblablement placée, sans que les projectiles aient tourné du même angle dans le temps dt, ce qui revient à dire qu'ils seront toujours sensiblement parallèles, lors même que l'équation de condition [5] ne serait pas satisfaite.

Il ne sera pas nécessaire non plus d'avoir égard aux conditions résultantes de la considération du couple provenant des forces centrifuges des éléments du corps tournant, puisque ces forces se contre-balancent autour de l'axe de figure. On pourra, par conséquent, en ce cas, se passer de

la condition [5]. Alors, pour la similitude, les seules conditions à remplir seront

$$\frac{v^2\delta}{\lambda\mu} = 1,$$

$$\tau = v,$$

$$\rho = \frac{v^2\delta\tau}{\lambda^2\mu};$$

d'où l'on tire

$$v = \tau = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\delta}},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda\delta}}.$$

En ce cas

$$\rho = \frac{\lambda\mu}{\delta}.$$

IIme Corollaire.

Si la résistance du milieu est dirigée constamment vers le centre de gravité, les seules conditions nécessaires et suffisantes pour la similitude des trajectoires sont, ainsi qu'on l'a remarqué plus haut,

$$\frac{v^2\delta}{\lambda\mu} = 1,$$

$$\tau = 1;$$

d'où l'on tire

$$v = \tau = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\delta}}.$$

Dans les armes rayées la vitesse de rotation du projectile est en raison directe de la vitesse de projection, et en raison inverse de la partie de l'axe de l'arme, qui répondrait à un tour entier des hélices prolongées, si cela était nécessaire : et c'est cette longueur qu'on appelle *pas*.

En exprimant par η le rapport des pas des armes que l'on compare entre elles, on aura

$$\rho = \frac{v}{\eta}.$$

Ainsi la seconde condition pour que les deux trajectoires soient semblables, deviendra

$$\eta = \frac{v}{\rho} = \lambda.$$

Nous pourrons donc énoncer le théorème suivant :

Deux armes rayées donnent des trajectoires semblables, toutes les fois

1° *Qu'elles sont tirées sous le même angle;*

2° *Qu'elles lancent des projectiles semblables par la forme et par la constitution intérieure;*

3° *Qu'elles ont les pas des hélices proportionnels aux diamètres des projectiles;*

4° *Qu'elles communiquent aux projectiles des vitesses initiales en raison directe des racines carrées de leurs diamètres et de leurs densités, et en raison inverse des racines carrées des densités des milieux résistants. Ces conditions une fois remplies, il s'ensuit :*

1° *Que les vitesses des projectiles dans les points homologues des trajectoires semblables, ainsi que les*

temps pour y arriver, sont dans la même raison des vitesses initiales;

2° Que les dimensions linéaires des deux trajectoires sont proportionnelles aux diamètres des projectiles.

Nous avons démontré, d'une autre manière, dans le mémoire précédent, ce théorème sur la similitude des trajectoires que décrivent les projectiles des armes rayées.

Armes à feu lisses.

Les armes à feu lisses lancent d'ordinaire des projectiles sphériques. La résistance, que le milieu exerce contre les projectiles sphériques, est toujours dirigée vers le centre de figure. Nous distinguerons le cas où le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre de figure, de celui où ces deux centres ne forment qu'un seul point.

Le premier cas a trait aux projectiles excentriques sphériques, dont on se sert dans quelques artilleries. Dans ce cas, pour qu'il y ait similitude entre les trajectoires, il faut, en vertu du théorème général ci-dessus, qu'on ait

$$\upsilon = \sqrt{\lambda},$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\delta = \mu;$$

et alors il en résultera

$$\tau = \sqrt{\lambda}$$

$$\sigma = \lambda.$$

Alors on aura

$$\sigma = \frac{\lambda\mu}{\delta}.$$

APPLICATIONS.

Armes à feu rayées.

Dans les armes à feu rayées, la charge de poudre imprime au projectile, dont la forme est un corps de révolution, une vitesse de projection, et en même temps, au moyen des rayures en hélice, une très-grande vitesse angulaire de rotation autour d'un axe, qui s'écarte très-peu de l'axe de figure.

Les projectiles lancés par les armes rayées se trouvent donc compris dans le cas considéré dans le I^er^ Corollaire. D'où il résulte que leurs trajectoires seront semblables, si les conditions suivantes sont satisfaites:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\delta}},$$

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda\delta}}.$$

Alors on aura

$$\tau = \sqrt{\frac{\lambda\mu}{\delta}},$$

$$\sigma = \frac{\lambda\mu}{\delta}.$$

D'où le théorème suivant :

Deux projectiles sphériques excentriques, semblables par la disposition de la matière, donnent des trajectoires semblables, dans des milieux résistants de densités proportionnelles aux densités des projectiles, lorsqu'ils sont lancés, sous le même angle, avec des vitesses initiales en raison des racines carrées de leurs diamètres, et avec des vitesses de rotation réciproquement proportionnelles aux racines carrées des mêmes diamètres.

Cela étant, les vitesses en des points homologues, et les temps nécessaires pour parcourir des arcs semblables, sont comme les racines carrées des diamètres, et les dimensions linéaires des trajectoires sont comme les diamètres des projectiles.

Il convient ici d'observer que lorsque un projectile tourne dans l'air autour d'un axe qui s'écarte beaucoup de la direction du mouvement de son centre de gravité, l'expérience a prouvé que la rotation engendre une augmentation ou une diminution dans la pression de l'air sur certaines parties de la surface, selon que celles-ci ont un mouvement de rotation conforme, ou contraire, au mouvement de translation (*).

Pour que la similitude subsiste, même en ayant égard à cette force normale, il faut que cette force soit en raison de la somme du carré de la vitesse de translation et du carré de la vitesse de rotation des points de la surface du projectile.

Jusqu'à présent on n'a pas une connaissance exacte de cette force qui a été signalée pour la première fois en 1852 par M^r^ Magnus : quant à nous, nous considérons

(*) Magnus, *De la déviation due au mouvement de rotation des projectiles.* Mémoire inséré dans la *Revue de Technologie militaire*, par Delobel. Tome I^r^. Liège, 1864.

comme plausible l'hypothèse, d'après laquelle cette force augmenterait en partie en raison du carré de la vitesse du centre de gravité du projectile, et en partie en raison du carré de la vitesse de rotation de sa surface.

Si les projectiles sphériques sont concentriques, on retombe sur le IIme Corollaire, et on aura le théorème suivant:

Quand les vitesses initiales de deux projectiles sphériques, lancés avec le même angle d'élévation, sont proportionnelles aux racines carrées des diamètres, aux racines carrées de leurs densités, et réciproquement proportionnelles aux racines carrées des densités des milieux résistants, les deux projectiles décrivent des trajectoires semblables. Alors le rapport des vitesses dans les points homologues, et le rapport des temps pour arriver à ces points, sont égaux au rapport des vitesses initiales; le rapport linéaire de similitude des trajectoires est égal au carré du rapport des vitesses.

Tel est le théorème, dit de Borda, qui rentre, comme cas particulier, dans le théorème général que nous venons d'établir.

Bien que ces théorèmes n'apprennent rien quant à la grandeur absolue des trajectoires des projectiles, et ne puissent servir à résoudre une question qu'autant qu'une autre analogue et d'égale difficulté aura été résolue, ils peuvent néanmoins être utiles en plusieurs circonstances. On pourra, par exemple, avec leur aide, se former d'avance une juste idée du tir d'une bouche à feu d'une réalisation coûteuse, par des expériences en petit sur une arme de moindres dimensions, qui remplirait les conditions que nous avons trouvées pour la similitude du tir.

DES EFFETS

DE LA ROTATION DE LA TERRE

SUR LE

MOUVEMENT DES PROJECTILES.

(*Journal des Sciences militaires des armées de terre et de mer*, 5me série, tome XIX, p. 385. Paris, 1858).

L'étude des causes, soit accidentelles, soit permanentes, qui concourent à la production des déviations qu'on observe dans le tir des projectiles, devient de jour en jour plus importante, à mesure qu'à l'aide de nouveaux perfectionnements on s'efforce d'augmenter la justesse du tir des armes à feu.

Parmi les causes permanentes, c'est-à-dire, parmi les causes dont l'effet est de donner naissance à des déviations, dans un sens déterminé et se reproduisant à tous les coups, on doit ranger le mouvement de rotation de la terre. A la vérité, les effets produits par cette cause sont inappréciables dans les portées ordinaires obtenues avec de grandes vitesses de projection ; mais ces effets, quoique encore assez faibles, ne peuvent plus être négligés complétement, lorsque

les portées sont très-grandes et la durée du trajet considérable. Faute d'y avoir égard, on s'expose à attribuer à des causes étrangères les déviations uniquement dues au mouvement de rotation de la terre.

Plusieurs géomètres, entre autres d'Alembert, Laplace et Gauss, ont soumis au calcul la question de l'influence de la rotation de la terre ; mais ils se sont plus spécialement occupés du mouvement vertical, en faisant abstraction de la résistance de l'air.

En 1837, Poisson s'est occupé de la même question (*) et en a étendu la solution au cas général où le projectile est lancé dans l'air, avec une vitesse et suivant une direction quelconques. Mais l'analyse employée par ce savant géomètre est assez laborieuse, et n'explique pas aux sens les effets divers produits par le mouvement diurne.

Il m'a semblé qu'on pourrait, par de simples considérations géométriques, rendre compte des effets qui résultent de la rotation du globe sur le tir des projectiles, et même calculer ces effets. Je ne fais en cela que suivre les idées émises par MM. Poinsot et Liouville relativement à l'explication d'un phénomène analogue : je veux dire le déplacement du plan des oscillations du pendule qui a lieu dans la belle expérience de Léon Foucault.

Tel est l'objet que je me propose dans ce Mémoire.

Je le divise en deux parties. La première contient l'explication des effets produits sur le tir par la rotation de la terre, à l'aide de considérations géométriques. La seconde renferme le calcul de ces effets et des applications au tir des bouches à feu.

(*) *Journal de l'École polytechnique*, XXVI cahier. Paris, 1838.

I.

EXPLICATION DES EFFETS PRODUITS.

C'est un principe de mécanique que tout mouvement, commun à tous les corps d'un système quelconque, n'altère point les mouvements particuliers de ces différents corps, les uns à l'égard des autres, mouvements qui continuent à s'exécuter comme si l'ensemble du système était immobile.

C'est en vertu de ce principe que le mouvement de translation de la terre, autour du soleil, n'a aucune influence, du moins appréciable, sur le mouvement des corps à sa surface. En effet, le mouvement annuel de translation de la terre, autour du soleil, est dû à une vitesse initiale et à l'attraction que cet astre exerce continuellement sur toutes les parties de notre globe. A cause de la petitesse du rayon de la terre, comparativement à la distance de la terre au soleil, on peut considérer cette attraction comme engendrant, dans des instants égaux, des mouvements égaux et de même direction, dans tous les points matériels du globe. Ce mouvement général, produit par l'attraction solaire, se combinant avec le mouvement commun antérieur, donnera évidemment naissance à un mouvement exactement commun à toutes les parties du globe, mouvement qui ne troublera, en aucune manière, les phénomènes mécaniques qui s'opèrent à sa surface.

On pourra de même, pour tout ce qui regarde les mouvements relatifs, faire abstraction du mouvement de translation du système solaire.

Le principe posé ci-dessus n'est applicable qu'autant que les mouvements des diverses parties du système sont rigoureusement égaux, pour le degré aussi bien que pour la direction. Cette exacte parité n'existe que dans le mouvement de translation, et ne saurait jamais avoir lieu quand il s'agit d'un mouvement de rotation qui présente toujours nécessairement des inégalités, entre les diverses parties du système, suivant qu'elles sont plus ou moins éloignées de l'axe de rotation. C'est pourquoi ce principe ne peut convenir au mouvement de rotation de la terre, autour de la ligne des pôles. Dans ce mouvement, il est vrai que tous les corps à sa surface ont un mouvement à fort peu près commun ; mais la parité entre leurs mouvements n'est pas complétement rigoureuse, d'où il résulte des dérangements dans les mouvements relatifs.

Pour pouvoir faire abstraction du mouvement des axes auxquels on rapporte le mouvement d'un mobile, lorsque ces axes ont le mouvement le plus général possible, c'est-à-dire, un mouvement composé de translation et de rotation, il est nécessaire de donner, à chaque instant, par la pensée, aux axes et au mobile, supposé comme lié d'une manière invariable à ces axes, un mouvement égal et contraire à celui que possèdent les axes à cet instant : ceux-ci se trouveront par là réduits à l'état de repos et le mobile sera animé d'un mouvement, résultant de la composition du mouvement qu'il avait d'abord, et de celui qu'on vient en outre de lui donner : ce mouvement résultant ne sera autre chose que le mouvement relatif cherché.

Le mouvement des axes étant donné, il n'est pas difficile de trouver les forces qu'il faudrait appliquer au mobile, pour produire le mouvement fictif égal et contraire à celui qu'aurait le mobile, s'il était lié invariablement aux axes mobiles, dans la position qu'il occupe à cet instant. Ces forces fictives, ajoutées aux forces réelles qui sollicitent le mobile, permettent de traiter son mouvement relatif, par rapport aux axes mobiles, comme un mouvement absolu, par rapport à des axes fixes.

Par l'adjonction de ces forces fictives, dont la conception est due à Coriolis, on pourrait écrire immédiatement les équations différentielles du mouvement d'un projectile, en ayant égard à la rotation de la terre. Mais ces équations ne sont point intégrables en général, pour une loi quelconque de la résistance de l'air. D'ailleurs, avec cette méthode, on perd de vue le phénomène mécanique.

Je vais tâcher de résoudre la question, en usant de considérations géométriques, plus accessibles à tout le monde, et qui mettront sous les yeux les effets divers, produits par la rotation de la terre sur le mouvement des projectiles.

Pour se former une idée nette de ce qui se passe lorsqu'un projectile est lancé d'un point de la surface de la terre, examinons successivement ce qui arriverait :

1° Si le projectile était lancé au pôle ;

2° Si le projectile était lancé à l'équateur, dans le plan du méridien ;

3° Si le projectile était lancé à l'équateur dans son plan même. Nous passerons de là au cas général d'un projectile lancé dans un plan quelconque, à telle latitude qu'on voudra.

Dans tout le cours de ce Mémoire, la terre sera considérée comme une sphère.

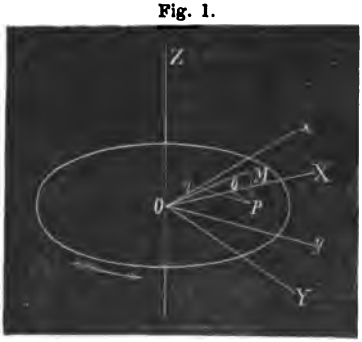
Tir au pôle, dans une direction quelconque.

Un observateur, placé debout au pôle boréal, tournerait sur lui-même, à son insu, de droite à gauche, en vertu du mouvement diurne de la terre. Si, dans cette position, il lançait un projectile dans une direction quelconque, il est clair que ce projectile parcourrait sa trajectoire, comme si la terre était immobile; car, en partant d'un point fixe, le projectile n'en recevrait aucune vitesse à ajouter à celle de projection qu'il reçoit par la main ou par l'instrument qui le lance.

Le plan de tir, restant fixe dans l'espace, paraîtra à l'observateur qui se croit en repos, se déplacer en sens inverse, c'est-à-dire marcher de gauche à droite, autour du pôle, avec une vitesse angulaire égale à celle de la rotation terrestre, savoir, d'une révolution en un jour sidéral.

Soit ZOX le plan vertical de tir (fig. 1), M le point où le projectile est arrivé, après un certain temps, point dont les coordonnées sont OQ, QP, PM. Pour plus de généralité, je suppose que la trajectoire est à double courbure.

Fig. 1.



Pour l'observateur qui est animé d'un mouvement de rotation, autour de l'axe de la terre OZ, dans le sens indiqué par la flèche, la trace OX du plan de tir se transporte, pendant le même temps dans une autre position $O\omega$, et les coordonnées apparentes du projectile sont Oq, qP, PM.

Dans les conditions présentées par la fig. 1, il est visible que Oq est moindre que OQ et qP plus grand que QP.

L'atmosphère, qui participe au mouvement de rotation de la terre, agira sur le projectile, au moyen d'une impulsion latérale continuelle dont l'effet sera de diminuer la déviation latérale qP; mais son action est très-faible et pourra être négligée, sans erreur notable; car la vitesse avec laquelle l'air viendra frapper le projectile est très-petite. En effet, la vitesse angulaire de rotation de la terre est une très-petite quantité, savoir $\frac{2\pi}{86164}$ ou $\frac{1}{13713}$, en prenant pour unité de temps la seconde de temps moyen solaire; de sorte que le produit de l'abscisse OQ, multipliée par cette vitesse angulaire, produit qui représente la vitesse de l'air, sera toujours un nombre très-petit.

Donc, au pôle boréal, les seuls effets de la rotation de la terre, sur le tir des projectiles, sont une déviation latérale, la même pour toutes les directions, et à droite de l'observateur placé au point de départ et tourné vers la trajectoire, et une diminution de l'abscisse dans le sens du tir.

Au pôle austral, la déviation latérale aurait lieu vers la gauche de l'observateur.

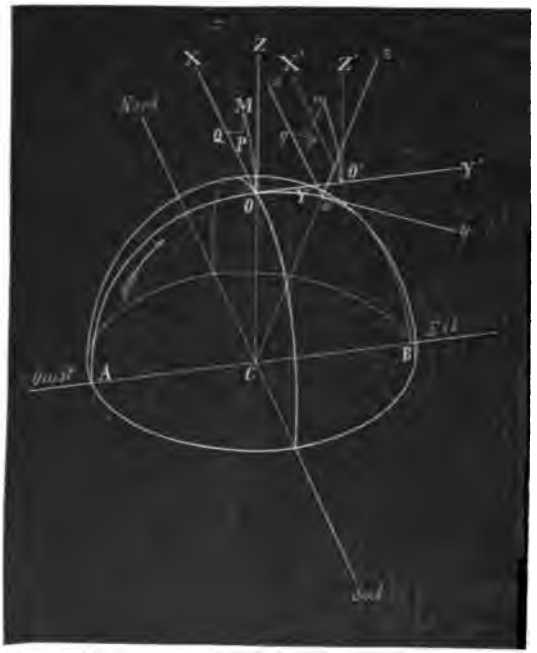
Tir à l'équateur dans le plan du méridien.

Plaçons le point de départ à l'équateur, et supposons la vitesse initiale dirigée dans le plan du méridien vers le nord. Soit AOB (fig. 2) l'équateur, ZOX le plan du méridien dans lequel le tir a lieu, M le point où se trouverait le mobile, au bout d'un temps quelconque, si la terre était immobile.

Il est clair que le projectile, outre la vitesse reçue par l'arme qui le lance, possède en même temps une vitesse horizontale, dirigée suivant OY, égale à celle de la surface de la terre.

Si les axes OX, OY, OZ se transportaient parallèlement à eux-mêmes, avec cette vitesse horizontale, et si pendant ce mouvement la force de gravité se conservait parallèle à elle-même, le projectile ne changerait point de position, par rapport à ces axes mobiles. Mais pendant que les axes s'éloignent du point de départ O, ils s'éloignent aussi du centre C de la terre, vers lequel est dirigée la gravité, de manière que le projectile sera obligé de se porter à la gauche de la position qu'il occupait par rapport aux axes, avant leur mouvement de translation.

Fig. 2.



Après un certain temps, les axes seront parvenus en $O'X'Y'Z'$, et le projectile se trouvera dans une position m, à gauche de la position qu'il aurait occupée si la direction de la gravité n'avait pas changé.

Pendant le même temps les axes OX, OY, OZ fixes à la surface de la terre, auxquels nous rapportons le mouvement, seront parvenu en ox, oy, oz, et les coordonnées du point m seront oq, qp, pm. Il est aisé de voir que oq sera égal à OQ, que qp sera moindre que QP, et que pm sera plus grand que PM.

On pourra négliger l'action produite sur le projectile par le mouvement de l'atmosphère, action due à la différence de vitesse des diverses couches, suivant leur hauteur, ainsi que la variation de la gravité, suivant la distance du centre C; car leur influence serait à peu près insensible dans les tirs les plus étendus qu'on puisse obtenir par les bouches à feu.

On en conclut que les effets du mouvement diurne de la terre sur un projectile lancé à l'équateur, dans le plan du méridien, vers le nord, sont: 1° une déviation latérale, à gauche de l'observateur; 2° un accroissement de l'ordonnée verticale du projectile.

Si le tir avait lieu vers le sud, la déviation latérale serait à droite, et l'accroissement de l'ordonnée, le même que dans le cas précédent.

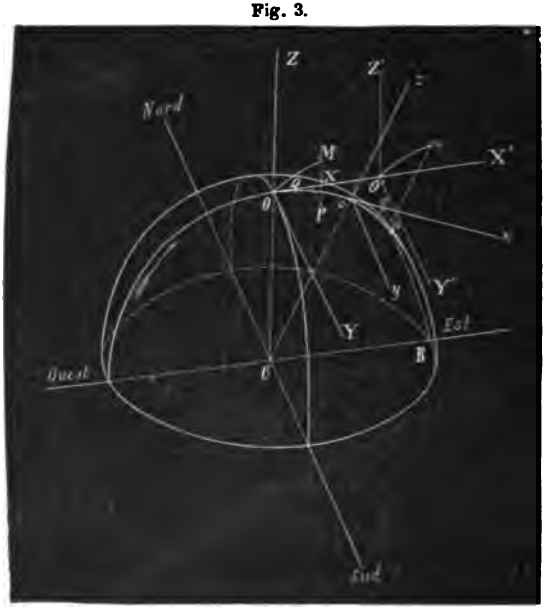
Tir à l'équateur et dans son plan.

Lorsque le projectile est lancé dans le plan de l'équateur, vers l'est, ou dans le sens du mouvement terrestre, il reçoit, outre sa vitesse de projection, une vitesse horizontale, égale à celle d'un point de l'équateur et dirigée dans son plan.

Il est d'abord clair que le mouvement de la terre ne produira point de déviation latérale.

Soit *ZOX* (fig. 3) le plan de tir, *M* le point où se trouverait le projectile, au bout d'un certain temps si la terre était en repos. En répétant le raisonnement employé ci-dessus, il est facile de voir qu'après le même temps, par l'effet du mouvement de la terre, le projectile se trouvera en *m* plus près de l'origine *O'* que *M* ne l'est de *O*, et que ses coordonnées, rapportées à des axes mobiles *ox*, *oy*, *oz* avec la terre, seront *oq*, *qp*, *pm*. De plus, que *oq* sera moindre que *OQ*, *qp* égal à *QP*, *pm* plus grand que *PM*.

Fig. 3.



On voit par là que les effets résultants du mouvement diurne, lorsque le projectile est lancé dans le plan de l'équateur, sont une diminution de l'abscisse, dans le sens du tir, et une augmentation de l'ordonnée verticale.

Si le corps, au lieu d'être lancé vers l'est, était lancé vers l'ouest, il est facile de s'assurer que les effets produits seraient un accroissement de l'abscisse, dans le sens du tir, et, dans la plupart des cas, une diminution de l'ordonnée verticale.

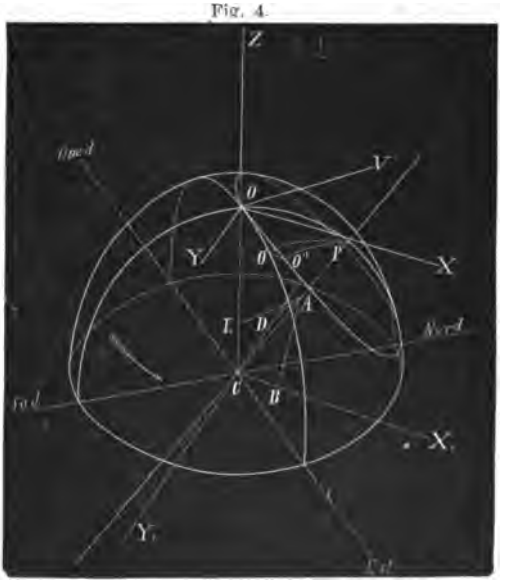
La déviation latérale est toujours nulle.

Tir à une latitude et dans une direction quelconques.

Considérons maintenant le cas général où le mobile est lancé d'un point quelconque de la surface de la terre, suivant une direction quelconque.

Pour se rendre compte des effets produits par la rotation de la terre, décomposons cette rotation en trois rotations rectangulaires; la première, autour du rayon de la terre passant par le point de départ; la seconde, autour d'une ligne menée par le centre de la terre, perpendiculairement au rayon précédent et comprise dans le plan de ce rayon et de la direction de la vitesse initiale; la troisième, autour d'une autre droite menée par le centre de la terre, dans une direction perpendiculaire au plan qui contient la direction de la vitesse initiale et le centre de la terre.

Fig. 4.



Soient O (fig. 4) le point de départ du projectile, OZ le prolongement du rayon CO, OX la projection de la direction OV de la vitesse initiale, sur le plan tangent en O à la surface de la terre, OY une perpendiculaire aux axes OX, OZ, et dirigée vers la droite de l'observateur, placé au point de départ et tourné

vers la trajectoire. Pour fixer les idées, nous supposerons que la direction de OX est comprise entre le nord et l'est.

Par le centre C de la terre, menons deux droites CX_1, CY_1, parallèles à OX, OY.

On sait que les trois rotations composantes s'obtiennent en projetant la longueur, qui représente la rotation de la terre autour de son axe CP, sur les trois axes rectangulaires CZ_1, CY_1, CX_1. Si l'on représente par CA la valeur de la rotation de la terre, autour de son axe des pôles, et si l'on abaisse les perpendiculaires AE, AD, AB, on pourra remplacer la rotation CA, par les trois rotations composantes CE, CD, CB.

Or, par rapport à la rotation CE, autour de l'axe CZ, le tir exécuté en O se trouve dans les mêmes conditions que le tir exécuté au pôle, par rapport à la véritable rotation de la terre; par rapport à la rotation CB, autour de l'axe CX_1, le tir se trouve dans les mêmes conditions que s'il avait lieu à l'équateur, dans le plan du méridien; enfin, par rapport à la rotation CD, autour de l'axe CY_1, tout doit se passer comme si le tir avait lieu à l'équateur et dans son plan même. De cette manière, on réduit la question aux trois cas simples que nous avons examinés successivement.

En vertu de la rotation CE, autour de CZ, on aura une déviation latérale, à droite, et une diminution de l'abscisse, dans le sens du tir, égales à celles qu'on aurait au pôle de la terre, avec cette différence que leur valeur sera moindre, dans le rapport de la composante CE à la résultante CA. En conséquence de la rotation CB, autour de CX_1, parallèle à la trace du plan de tir, on aura une déviation latérale, à gauche, et un accroissement de l'ordonnée verticale, comme si la terre ne possédait que la rotation composante CB. Enfin à cause de la rotation CD,

autour de CY_1, on aura une diminution de l'abscisse, dans le sens du tir, et un accroissement de l'ordonnée verticale.

Nous devons donc conclure, de cette analyse, que les effets de la rotation de la terre, sur le mouvement d'un projectile lancé dans une direction OV, sont une diminution de l'abscisse, dans le sens du tir, un accroissement de l'ordonnée verticale, et une déviation latérale, égale à la différence des déviations, au pôle et à l'équateur, dues respectivement aux rotations CE, CB.

A nos latitudes, la déviation au pôle surpasse de beaucoup l'autre, de sorte que le résultat est une déviation à droite. Nous verrons bientôt, à l'aide du calcul, que cette déviation à droite a une valeur prépondérante sur les autres variations produites par la rotation de la terre, et qu'on peut la considérer comme en étant l'effet principal.

Si le tir avait lieu dans une autre direction que celle qui est marquée sur la figure, la diminution de l'abscisse, dans le sens du tir, et l'augmentation de l'ordonnée verticale pourraient changer de signe et devenir une augmentation et une diminution. Il est facile de s'assurer, au moyen des figures appropriées, que, dans l'hémisphère boréal, si le tir a lieu dans un des *rumbs* compris entre le nord, l'est et le sud, il y a diminution de l'abscisse et accroissement de l'ordonnée. Tandis que si le tir est dirigé vers un point quelconque, compris entre le nord, l'ouest et le sud, l'effet produit est généralement une augmentation de l'abscisse et une diminution de l'ordonnée.

Dans l'hémisphère austral, la déviation latérale change de signe et a lieu à gauche, pendant que les accroissements, positifs ou négatifs, soit de l'abscisse, dans le sens du tir, soit de l'ordonnée verticale, sont égaux à ceux qui ont lieu aux mêmes latitudes, dans l'hémisphère boréal.

Il importe de remarquer que le point O, après les trois

rotations successives, viendra occuper une position O', sur un grand cercle de la terre passant par le point O, tandis qu'il devrait se trouver en O'', sur le parallèle passant par le point O, à une distance égale de ce point. Il est assez clair que le point O'', où il doit venir se placer sur le parallèle, se trouve plus au nord et sensiblement sur le même méridien que le point O' qui y correspond sur le grand cercle. Donc, si l'on rapporte le mouvement aux axes qui passent par le premier point O'', il faudra diminuer l'abscisse et augmenter la déviation à droite, d'après les dispositions de la fig. 4 qui nous sert de type.

Enfin, il est à remarquer que la verticale d'un lieu quelconque de la surface de la terre n'a pas la même direction que si la terre était immobile: car, la direction du *fil à plomb*, c'est-à-dire, ce qu'on nomme la *verticale*, est la direction de la résultante de l'attraction de la terre, dirigée vers son centre, et de la force centrifuge, dirigée dans le prolongement du rayon du parallèle. La résultante de ces deux forces a généralement une direction différente de celle de chacune des composantes; ce n'est qu'au pôle et à l'équateur que la direction de la verticale n'est pas changée par l'effet de la rotation de la terre.

Au lieu de rapporter le mouvement du projectile au prolongement du rayon de la terre, comme nous l'avons fait jusqu'ici, il faut le rapporter à la verticale du point de départ, c'est-à-dire, il faut incliner l'axe des z vers le nord. Ce changement d'axes a pour effet d'augmenter l'ordonnée verticale et de diminuer généralement l'abscisse, dans le sens du tir, et la déviation latérale, à droite, dans les dispositions de la fig. 4.

Le changement d'origine et le changement de direction des axes des coordonnées produisent, sur la déviation latérale, des effets contraires qui tendent à se contrebalancer.

II.

CALCUL DES EFFETS PRODUITS.

Maintenant que nous avons vu quels sont les effets qui résultent du mouvement diurne, nous allons passer aux calculs de ces effets. Pour cela, nous suivrons la même route que ci-dessus: nous commencerons par les cas plus simples du tir, au pôle et à l'équateur, pour nous élever ensuite au cas général du tir, à une latitude et dans une direction quelconques.

Soient O le point de départ, OV la direction de la vitesse de projection. Par le point O menons trois axes rectangulaires OZ, OX, OY, le premier, dirigé suivant le prolongement du rayon de la terre; le second, compris dans le plan qui passe par OZ et OV, et le troisième, perpendiculaire aux deux autres. Les Z positifs sont portés de bas en haut; les X positifs, du côté vers lequel est dirigée la composante de la vitesse de projection suivant OX, les Y positifs, à la droite de l'observateur, placé au point O et tourné vers les X positifs.

Les coordonnées X, Y, Z sont des fonctions du temps t, qu'on pourra toujours déterminer, du moins par approximation, lorsque la loi de la résistance de l'air sera donnée. Cette question est résolue dans les traités de balistique, et il n'entre pas dans mon sujet de m'en occuper ici.

Pour procéder avec toute rigueur, il faudra, dans les formules de balistique qui servent à déterminer X, Y, Z, remplacer le poids du projectile par le poids qu'il aurait, si la terre était immobile, c'est-à-dire, ajouter à la gravité apparente la force centrifuge, engendrée, en sens contraire, par le mouvement de rotation de la terre.

Nommons ω la vitesse angulaire du mouvement diurne de la terre; r le rayon de la terre; G l'attraction terrestre.

Si l'on observe que la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}0000729,$$

ou 15″,04 de degré, est une quantité très-petite, et que les coordonnées X, Y, Z ne sont pas des nombres très-grands dans toutes les applications balistiques, on conclura que nous pourrons, sans erreur notable, négliger les termes qui renferment l'une des coordonnées X, Y, Z, multipliée par ω, à une puissance supérieure à la première. Comme la valeur du rayon terrestre

$$r = \frac{20.000.000}{\pi} = 6.366.198^{m}$$

est très-grande, de sorte que

$$r\omega = 464^{m}$$

est comparable à X, Y, Z, nous tiendrons compte des termes contenant $r\omega^2$, et nous ne négligerons que ceux qui renferment $r\omega^3$, $r\omega^4$, etc.

Tir au pôle.

Il est évident que l'angle XOx (fig. 1), décrit par la trace OX, dans le temps t, est ωt, et que les coordonnées du projectile, au bout de ce temps, rapportées aux axes mobiles Ox, Oy, Oz, sont

$$x = X\cos\omega t - Y\sin\omega t,$$

$$y = X\sin\omega t + Y\cos\omega t,$$

$$z = Z.$$

En négligeant les puissances de ω supérieures à la première, on aura

$$[1] \quad \ldots \quad \begin{cases} x = X - \omega t Y, \\ y = Y + \omega t X, \\ z = Z. \end{cases}$$

Au même degré d'approximation, on devra négliger l'action produite par le mouvement de l'atmosphère qui participe au mouvement de rotation de la terre; car la vitesse avec laquelle l'air frappera le projectile, sera ωX, et la force qui en naîtra sera proportionnelle à une puissance de ω supérieure à la première.

Tir à l'équateur, dans le plan du méridien.

Supposons le point de départ à l'équateur, et la vitesse

de projection, dirigée vers le nord, dans le plan du méridien. Nous avons vu ci-dessus que, pendant que les axes se transportent parallèlement à eux-mêmes de O en O' (fig. 2), l'attraction terrestre est constamment dirigée vers le centre C duquel ils s'éloignent. A l'époque t l'attraction terrestre fait avec l'axe $O'Z'$ un angle ωt; par conséquent, ses composantes sont

$$G\cos\omega t, \qquad \text{suivant l'axe } O'Z',$$

$$G\sin\omega t, \qquad \text{suivant l'axe } O'Y',$$

ou simplement, au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons,

$$G \qquad \text{et} \qquad G\omega t.$$

Il s'ensuit que, par rapport aux ordonnées Z', le mouvement aura lieu comme si la terre était en repos.

En appelant η la déviation due à la composante $G\omega t$, on aura pour la déterminer l'équation

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -G\omega t;$$

d'où l'on tire, en intégrant deux fois,

$$\eta = -\frac{G\omega t^3}{6}.$$

On n'a pas ajouté de constante, parce que, pour $t = o$, on doit avoir

$$\frac{d\eta}{dt} = o \qquad \text{et} \qquad \eta = o.$$

Nous aurons donc

$$X' = X,$$
$$Y' = Y - \frac{G\omega t^3}{6},$$
$$Z' = Z.$$

Il est bon de prévenir une difficulté qui pourrait se présenter à l'esprit: on pourrait se demander pourquoi l'on ne tient pas compte de la composante de l'attraction suivant l'axe $O'X'$, composante dont la valeur, bien que petite, est comparable à la composante suivant $O'Y'$ pour une valeur assez grande de X'. Mais on doit remarquer que son effet est compris implicitement dans la valeur donnée de X en fonction de t: c'est à la balistique ordinaire d'y avoir égard, si on le juge nécessaire.

Pour déterminer le mouvement apparent du projectile, tel qu'on l'observe à la surface de la terre, il faut le rapporter à des axes fixes à cette surface, ce qui exige qu'on change les coordonnées X', Y', Z' en d'autres x, y, z. Les coordonnées de la nouvelle origine o, comptées parallèlement aux anciens axes, sont respectivement

$$\text{zéro},$$
$$r \sin \omega t - r\omega t,$$
$$-r(1 - \cos \omega t):$$

au degré d'approximation voulu, les deux premières sont nulles, et la troisième est égale à

$$-\frac{r\omega^2 t^2}{2}.$$

L'angle formé par le nouvel axe oz avec l'ancien $O'Z'$ est égal à ωt, de sorte qu'on aura

$$y = Y' \cos \omega t - \left(Z' + \frac{r \omega^2 t^2}{2} \right) \sin \omega t ,$$

$$z = Y' \sin \omega t + \left(Z' + \frac{r \omega^2 t^2}{2} \right) \cos \omega t .$$

Si l'on néglige les quantités du second ordre en ω lorsqu'il est multiplié par une coordonnée, et du troisième, lorsqu'il est multiplié par le rayon terrestre, on trouvera

$$y = Y' - \omega t Z' ,$$

$$z = \omega t Y' + Z' + \frac{r \omega^2 t^2}{2} .$$

En substituant les valeurs de Y', Z', on obtiendra enfin, pour les coordonnées du projectile au bout du temps t, les expressions

$$[2] \quad \ldots \quad \begin{cases} x = X , \\ y = Y - \omega t Z - \dfrac{G \omega t^3}{6} , \\ z = Z + \omega t Y + \dfrac{r \omega^2 t^2}{2} . \end{cases}$$

On pourra faire abstraction de la différence de vitesse des diverses couches de l'atmosphère, ainsi que de la variation de l'attraction terrestre, suivant la distance du centre

de la terre, parce que les effets qui en dépendent sont représentés par des quantités de l'ordre de celles que nous négligeons.

Tir dans le plan de l'équateur.

Lorsque le tir a lieu dans le plan de l'équateur et dans le sens du mouvement de la terre, pour avoir les coordonnées du mobile, au bout du temps t, il est clair qu'il suffit de changer, dans les formules [2] obtenues pour le cas précédent, X en Y, Y en X, x en y, y en x. D'après cela, on aura

$$[3] \quad \ldots \quad \begin{cases} x = X - \omega t Z - \dfrac{G\omega t^3}{6}, \\ y = Y, \\ z = Z + \omega t X + \dfrac{r\omega^2 t^2}{2}, \end{cases}$$

pour fixer la position du projectile au bout du temps t.

Tir à une latitude et dans une direction quelconques.

Soit λ la latitude du point de départ O (fig. 4), α l'azimut du plan de tir, ou l'angle formé par le plan qui contient l'axe OZ et la direction OV de la vitesse initiale, avec le plan méridien. Cet angle sera mesuré, à partir du point nord dans le sens nord, est, sud, ouest. De ces deux angles le premier λ ne variera que de $-90°$ à $+90°$, tandis que le second α devra varier de $0°$ à $360°$.

L'angle ZCP, formé par l'axe CZ avec l'axe de la terre CP, est égal à $90° - \lambda$, donc la composante de la rotation, suivant CZ, sera

$$CE = \omega \sin \lambda ;$$

et la composante perpendiculaire dans le plan du méridien, sera

$$\omega \cos \lambda ;$$

par conséquent, on aura

$$CB = \omega \cos \alpha \cos \lambda ,$$

$$CD = \omega \sin \alpha \cos \lambda .$$

En n'ayant égard qu'à la rotation, estimée autour de CZ, les choses se passent comme si le tir avait lieu au pôle, et comme si la vitesse de rotation de la terre était égale à

$$\omega \sin \lambda .$$

Donc, pour avoir l'effet de cette rotation, il suffit de mettre, dans les équations [1],

$$\omega \sin \lambda , \qquad \text{à la place de } \omega .$$

D'après cela, nous aurons

$$x = X - \omega t Y \sin \lambda ,$$

$$y = Y + \omega t X \sin \lambda ,$$

$$z = Z .$$

Par rapport à la rotation, estimée autour de CX_1, c'est comme si le tir avait lieu à l'équateur, dans le plan du méridien. Il faudra donc, dans les équations [2] mettre, au lieu de X, Y, Z, les valeurs précédentes de x, y, z, et remplacer la rotation ω par sa composante $\omega \cos\alpha \cos\lambda$.

En négligeant le carré et les puissances supérieures de ω, il vient

$$x = X - \omega t Y \sin\lambda,$$

$$y = Y + \omega t X \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{G t^2}{6}\right) \cos\alpha \cos\lambda,$$

$$z = Z + \omega t Y \cos\alpha \cos\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2} \cos^2\alpha \cos^2\lambda.$$

Enfin, par la rotation autour de CY_1, le phénomène est réduit au cas du tir à l'équateur et dans son plan.

En remplaçant dans les équations [3] X, Y, Z par les valeurs précédentes de x, y, z, et changeant

$$\omega \quad \text{en} \quad \omega \sin\alpha \cos\lambda,$$

on obtient, au degré d'approximation voulu,

$$x = X - \omega t Y \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{G t^2}{6}\right) \sin\alpha \cos\lambda,$$

$$y = Y + \omega t X \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{G t^2}{6}\right) \cos\alpha \cos\lambda,$$

$$z = Z + \omega t (X \sin\alpha + Y \cos\alpha) \cos\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2} \cos^2\lambda.$$

Nous avons déjà fait remarquer qu'après les trois rotations

successives l'origine des coordonnées se trouve transportée sur un grand cercle tangent au parallèle qui passe par le point de départ ; tandis qu'en réalité, par la rotation de la terre, l'origine doit se trouver sur ce parallèle.

Ce déplacement de l'origine est une conséquence du couple de rotations qu'il faut ajouter à la rotation de la terre pour la transporter de C en O; ce couple produit un mouvement de translation qu'on doit ajouter, à chaque instant infiniment petit, au mouvement de rotation. On sait que ce mouvement de translation est perpendiculaire au plan du couple, ou, dans notre cas, au méridien; par conséquent l'origine devra décrire une ligne perpendiculaire à tous les méridiens, c'est-à-dire le parallèle qui passe par sa position initiale.

Nous allons calculer maintenant la distance $O'O''$ qui sépare les deux positions différentes de l'origine, ainsi que l'azimut de cette distance.

Réunissons le pôle P aux trois points O, O', O'' avec des arcs de grand cercle. Nous aurons

$$PO = PO'' = 90° - \lambda,$$

$$OO' = OO'' = \omega t \cos\lambda,$$

l'angle $OPO'' = \omega t.$

Le triangle sphérique POO' étant rectangle en O, donne

$$\cos PO' = \cos PO \cos OO' = \sin\lambda \cos(\omega t \cos\lambda),$$

$$\sin OPO' = \frac{\sin OO'}{\sin PO'} = \frac{\sin(\omega t \cos\lambda)}{\sqrt{1 - \sin^2\lambda \cos^2(\omega t \cos\lambda)}}.$$

L'angle

$$O'PO''=OPO''-OPO'=\omega t-OPO',$$

donc

$$\cos O'PO''=\frac{\cos\lambda\cos\omega t\cos(\omega t\cos\lambda)+\sin\omega t\sin(\omega t\cos\lambda)}{\sqrt{1-\sin^2\lambda\cos^2(\omega t\cos\lambda)}}.$$

Dans le triangle sphérique $O'PO''$ on connaît ainsi les deux côtés PO', PO'', et l'angle compris $O'PO''$; on aura donc

$$\cos O'O''=\cos PO'\cos PO''+\sin PO'\sin PO''\cos O'PO'',$$

ou bien

$$\cos O'O''=\sin^2\lambda\cos(\omega t\cos\lambda)+\cos^2\lambda\cos\omega t\cos(\omega t\cos\lambda)+\cos\lambda\sin\omega t\sin(\omega t\cos\lambda).$$

En développant, suivant les puissances de ω, il vient

$$\cos O'O''=1-\frac{\omega^4t^4}{2.4}\sin^2\lambda\cos^2\lambda+\text{etc.}$$

et par suite

$$O'O''=\frac{\omega^2t^2}{2}\sin\lambda\cos\lambda+\text{etc.}$$

Dans le rayon r, et au degré d'approximation où nous nous arrêtons, la distance cherchée sera

$$\frac{r\omega^2t^2}{2}\sin\lambda\cos\lambda \qquad \text{ou} \qquad \frac{r\omega^2t^2}{4}\sin 2\lambda.$$

L'azimut du côté $O'O''$, ou l'angle $O''O'P$, s'obtiendra au moyen de la formule

$$\sin O''O'P = \sin O'PO'' \frac{\sin PO''}{\sin O'O''}.$$

En substituant les valeurs de $O'PO''$, $O'O''$, trouvées ci-dessus, et développant suivant les puissances de ω, on trouve

$$\sin O''O'P = \frac{2}{3}\omega t \sin\lambda + \text{etc.}$$

A l'aide de ces valeurs, on trouve que les coordonnées du point O'', par rapport aux axes passant par le point O', sont, au degré d'approximation voulu,

$$\frac{r\omega^2 t^2}{4}\cos\alpha \sin 2\lambda \qquad \text{et} \qquad -\frac{r\omega^2 t^2}{4}\sin\alpha \sin 2\lambda.$$

En transportant l'origine des coordonnées au point O'', il vient

$$x = X - \omega t Y \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\sin\alpha\cos\lambda$$

$$-\frac{r\omega^2 t^2}{4}\cos\alpha\sin 2\lambda,$$

$$y = Y + \omega t X \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\cos\alpha\cos\lambda$$

$$+\frac{r\omega^2 t^2}{4}\sin\alpha\sin 2\lambda,$$

$$z = Z + \omega t\,(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)\cos\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda.$$

Si nous désignons par ΔX, ΔY, ΔZ les variations produites sur les coordonnées, par la rotation de la terre, nous aurons

$$\Delta X = -\omega t Y \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right) \sin\alpha \cos\lambda$$

$$-\frac{r\omega^2 t^2}{4} \cos\alpha \sin 2\lambda,$$

$$\Delta Y = \omega t X \sin\lambda - \omega t \left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right) \cos\alpha \cos\lambda$$

$$+\frac{r\omega^2 t^2}{4} \sin\alpha \sin 2\lambda,$$

$$\Delta Z = \omega t (X \sin\alpha + Y \cos\alpha) \cos\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2} \cos^2\lambda.$$

De ces trois formules, on déduit l'équation

$$\cos\alpha \cos\lambda \Delta X - \sin\alpha \cos\lambda \Delta Y + \sin\lambda \Delta Z = 0.$$

Or, les coefficients de ΔX, ΔY, ΔZ sont les cosinus des angles que l'axe de la terre CP fait avec les axes dès X, Y, Z. Il s'ensuit donc que la somme des projections, sur l'axe des pôles, des variations produites par la rotation de la terre est nulle; ce qui fait voir que la rotation de la terre n'augmente ni ne diminue la distance du projectile, pendant toute la durée de son mouvement, au plan du parallèle passant par le point de départ.

Ce résultat pouvait être facilement prévu: en effet, la rotation de la terre ne peut évidemment engendrer que des vitesses et des forces normales à l'axe de rotation, lesquelles ne peuvent ni augmenter ni diminuer la distance qui

sépare, à chaque instant, le projectile du plan de l'équateur.

Afin de rendre applicables aux expériences les équations du mouvement apparent du projectile, il est nécessaire de faire subir un petit changement à la direction de l'axe des z. En effet, la verticale d'un lieu quelconque de la surface de la terre n'a pas la même direction que si la terre était immobile. Lorsque la terre est immobile, la verticale prolongée passe par son centre, en négligeant la non-sphéricité du globe terrestre: lorsqu'elle tourne sur son axe, la verticale, ou la direction du fil à plomb, est la direction de la résultante de l'attraction de la terre et de la force centrifuge. Cette dernière force est dirigée suivant le prolongement du rayon du parallèle. Ce rayon est

$$r \cos \lambda ;$$

et il fait, avec le rayon de la terre, l'angle λ. Donc, la force centrifuge sera

$$r \omega^2 \cos \lambda ;$$

et ses composantes, suivant le rayon terrestre, et la perpendiculaire à ce rayon, seront

$$r \omega^2 \cos^2 \lambda , \qquad r \omega^2 \sin \lambda \cos \lambda .$$

Si l'on représente par g la gravité apparente, G l'attraction terrestre, on aura

$$g^2 = (G - r \omega^2 \cos^2 \lambda)^2 + r^2 \omega^4 \sin^2 \lambda \cos^2 \lambda ,$$

d'où l'on tire, en négligeant les quantités de l'ordre

$$\frac{r^2\omega^4}{G^2} \qquad \left(\frac{r\omega^2}{G} = \frac{1}{290} \text{ à très-peu près}\right),$$

$$g = G - r\omega^2 \cos^2\lambda.$$

Si l'on désigne par θ l'angle que g fait avec G, on aura

$$\sin\theta = \frac{r\omega^2 \sin\lambda\cos\lambda}{g}$$

$$\cos\theta = \frac{G - r\omega^2\cos^2\lambda}{g}$$

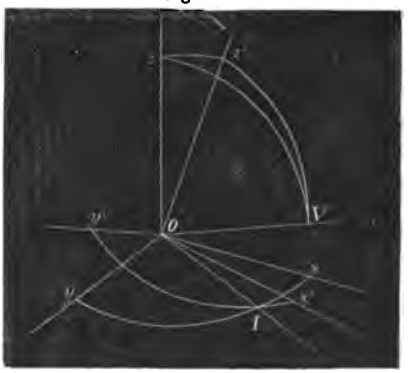
et, à notre degré d'approximation,

$$\sin\theta = \frac{r\omega^2}{2G}\sin 2\lambda,$$

$$\cos\theta = 1.$$

Pour déterminer le mouvement apparent, tel qu'on l'observe à la surface terrestre, nous prendrons l'axe Oz' (fig. 5), vertical et dirigé vers le *zénith*, ou en sens contraire de la pesanteur; l'axe Ox' horizontal et compris dans le plan qui contient l'axe Oz', et la direction OV de la vitesse de projection; l'axe Oy' perpendiculaire aux deux autres et dirigé vers la droite de l'observateur qui regarde la trajectoire.

Fig. 5.



La position des nouveaux axes est déterminée, relativement aux anciens, par l'angle θ que font les deux axes Oz, Oz', et par les angles que les axes Ox, Ox' font avec l'intersection OI des plans xy, $x'y'$. Cette intersection est évidemment perpendiculaire au méridien qui contient les deux axes Oz, Oz': par conséquent, les deux angles qui fixent la position des axes Ox, Ox', sont $90° - \alpha$, $90° - \alpha'$; en désignant par α, α' les azimuts de la direction OV de la vitesse initiale, par rapport à chaque système d'axes.

Pour déterminer l'angle α', imaginons une sphère, décrite du point O comme centre, et d'un rayon quelconque; nous aurons, sur sa surface, un triangle sphérique formé par les trois arcs qui répondent aux angles zOz', zOV, $z'OV$. Dans ce triangle, on connaît le côté $zz' = \theta$, le côté $z'V = 90° - \varphi$, φ étant l'angle de projection sur l'horizon, et l'angle $Vzz' = \alpha$; on aura donc pour déterminer l'autre angle

$$Vz'z = 180° - \alpha',$$

d'après une formule connue de trigonométrie sphérique,

$$\cot \alpha \sin \alpha' - \cos \theta \cos \alpha' = \operatorname{tang} \varphi \sin \theta.$$

A cause de

$$\cos \theta = 1,$$

on aura

$$\sin (\alpha' - \alpha) = \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \sin \theta,$$

et, en substituant la valeur de $\sin \theta$,

$$\sin (\alpha' - \alpha) = \frac{r\omega^2}{2G} \sin \alpha \operatorname{tang} \varphi \sin 2\lambda.$$

Si nous supposons qu'on se borne toujours à la première puissance de $\frac{r\omega^2}{G}$ ou de *sin* θ, on aura

$$\cos(\alpha' - \alpha) = 1,$$

et

$$\cos\alpha = \cos\left[\alpha' - (\alpha' - \alpha)\right] = \cos\alpha' + \sin\alpha' \sin(\alpha' - \alpha),$$

$$\sin\alpha = \sin\left[\alpha' - (\alpha' - \alpha)\right] = \sin\alpha' - \cos\alpha' \sin(\alpha' - \alpha).$$

Cela posé, pour passer du système des coordonnées rectangulaires, x, y, z, au système des coordonnées aussi rectangulaires x', y', z', on se servira des formules connues d'Euler, pour la transformation des coordonnées, d'après lesquelles on aura, en faisant toujours *cos* $\theta = 1$, *cos* $(\alpha' - \alpha) = 1$,

$$x' = x + y \sin(\alpha' - \alpha) - z \cos\alpha' \sin\theta,$$

$$y' = y - x \sin(\alpha' - \alpha) + z \sin\alpha' \sin\theta,$$

$$z' = z + x \cos\alpha \sin\theta - y \sin\alpha \sin\theta.$$

En mettant, dans ces expressions, les valeurs de *sin* $(\alpha' - \alpha)$, *cos* α, *sin* α, et négligeant le carré de *sin* θ, elles deviendront

$$x' = x + y \sin\alpha' \operatorname{tang}\varphi \sin\theta - z \cos\alpha' \sin\theta,$$

$$y' = y - x \sin\alpha' \operatorname{tang}\varphi \sin\theta + z \sin\alpha' \sin\theta,$$

$$z' = z + x \cos\alpha' \sin\theta - y \sin\alpha' \sin\theta.$$

Donc, en substituant ici les valeurs de x, y, z et de $\sin\theta$, on obtiendra enfin, pour les coordonnées du projectile, à l'instant t,

$$[4]\quad \begin{cases} x = X - \omega t Y \sin\lambda - \omega t\left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\sin\alpha\cos\lambda \\ \quad + \frac{r\omega^2}{2G}\left(Y\sin\alpha\,\mathrm{tang}\,\varphi - Z\cos\alpha - \frac{Gt^2}{2}\cos\alpha\right)\sin 2\lambda, \\ y = Y + \omega t X \sin\lambda - \omega t\left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\cos\alpha\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2G}\left(X\,\mathrm{tang}\,\varphi - Z - \frac{Gt^2}{2}\right)\sin\alpha\sin 2\lambda, \\ z = Z + \omega t\,(X\sin\alpha + Y\cos\alpha)\cos\lambda \\ \quad + \frac{r\omega^2}{2G}\left(X\cos\alpha - Y\sin\alpha\right)\sin 2\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda, \end{cases}$$

où l'on a supprimé les accents sur x, y, z, α.

Lorsqu'on aura X, Y, Z en fonction de t, ces équations feront connaître, au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, la position du projectile, à un instant quelconque, relativement à des axes qui se meuvent avec la terre.

Réciproquement, si, au moyen de l'expérience, on connaît les coordonnées x, y, z et le temps t, on pourra par l'élimination trouver X, Y, Z.

En nous bornant toujours au même degré d'approximation, on trouve

$$[5]\quad \begin{cases} X = x + \omega t y \sin\lambda + \omega t \left(z + \frac{g t^2}{6}\right) \sin\alpha \cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2g}\left(y \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi - z\cos\alpha - \frac{g t^2}{2}\cos\alpha\right)\sin 2\lambda, \\ Y = y - \omega t x \sin\lambda + \omega t \left(z + \frac{g t^2}{6}\right)\cos\alpha\cos\lambda \\ \quad + \frac{r\omega^2}{2g}\left(x \operatorname{tang}\varphi - z - \frac{g t^2}{2}\right)\sin\alpha \sin 2\lambda, \\ Z = z - \omega t (x \sin\alpha + y\cos\alpha)\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2g}(x\cos\alpha - y\sin\alpha)\sin 2\lambda - \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda . \end{cases}$$

La portée horizontale, ou la distance au plan yz du point où le projectile retombe sur le plan xy, et la durée du trajet qui y répond, sont les valeurs de x et de t qui répondent à $z = o$; on aura donc, pour déterminer la durée du trajet, l'équation

$$Z + \omega t (X \sin\alpha + Y\cos\alpha)\cos\lambda$$
$$+ \frac{r\omega^2}{2G}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha)\sin 2\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda = o ,$$

qu'on résoudra par rapport à t, lorsque les valeurs de X, Y, Z seront données en fonction de t. La valeur de t qu'on en tirera, étant substituée dans l'expression de x, fera connaître la portée.

On ne doit point oublier que les coordonnées X, Y, Z répondent à un angle de projection, différent de celui auquel

répondent x, y, z; car la verticale a changé, en passant des premières aux secondes. Soit ψ l'angle de projection, dans le cas de la terre immobile, et φ l'angle de projection, lorsque la terre est en mouvement. La relation qui passe entre ψ et φ nous sera donnée par le même triangle sphérique que nous avons déjà considéré pour exécuter la transformation des coordonnées, c'est-à-dire le triangle $z z' V$ (fig. 5), dont les côtés sont

$$z z' = \theta, \qquad z' V = 90° - \varphi, \qquad z V = 90° - \psi,$$

et les angles opposés aux deux derniers

$$z' z V = \alpha, \qquad z z' V = 180° - \alpha'.$$

Par une formule connue de trigonométrie sphérique, on a

$$\sin \psi = \sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta \cos \alpha' ;$$

et puisque

$$\cos \theta = 1, \qquad \sin \theta = \frac{r \omega^2}{2G} \sin 2\lambda,$$

on trouve

$$\sin \psi = \sin \varphi - \frac{r \omega^2}{2G} \cos \varphi \cos \alpha' \sin 2\lambda ;$$

d'où l'on tire, en négligeant $\frac{r^2 \omega^4}{G^2}$,

$$\cos \psi = \cos \varphi + \frac{r \omega^2}{2G} \sin \varphi \cos \alpha' \sin 2\lambda .$$

Cette valeur de ψ en φ devra être substituée dans les expressions de X, Y, Z, lorsqu'elles seront données en φ et t. Mais on ne peut avoir les valeurs de X, Y, Z en fonction de φ et de t que dans quelques hypothèses particulières sur la loi de la résistance de l'air; cependant il serait désirable de pouvoir comparer en général x, y, z avec les coordonnées X_1, Y_1, Z_1, d'un projectile lancé sous le même angle φ, sur la terre en repos.

Pour y parvenir, on peut admettre, vu que ψ et φ diffèrent très-peu, qu'au bout du même temps t, Y est égal à Y_1, et que la partie de la tangente initiale, interceptée entre l'origine et le plan qui passe par l'extrémité de l'arc de la trajectoire, et qui est parallèle au plan coordonné YZ, ainsi que l'abaissement du projectile au-dessous de cette tangente, sont indépendants de l'angle de projection. Cela posé, on aura

$$\frac{X}{\cos\psi} = \frac{X_1}{\cos\varphi},$$

d'où l'on tire, en substituant la valeur de $\cos\psi$,

$$X = X_1 + \frac{r\omega^2}{2G} X_1 \operatorname{tang}\varphi \cos\alpha' \sin 2\lambda.$$

De plus, on aura

$$Z - Z_1 = X \operatorname{tang}\psi - X_1 \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où l'on tire, en ayant égard à la première équation,

$$Z - Z_1 = X_1 \frac{\sin\psi}{\cos\varphi} - X_1 \operatorname{tang}\varphi.$$

En substituant pour $\sin\psi$ sa valeur en φ, on obtient

$$Z = Z_1 - \frac{r\omega^2}{2G} X_1 \cos\alpha' \sin 2\lambda.$$

A l'aide de ces valeurs de X, Y, Z, les équations [4] deviennent, en se bornant toujours au même degré d'approximation, et omettant l'accent sur α,

$$[6]\quad\begin{cases} x = X_1 - \omega t\, Y_1 \sin\lambda - \omega t \left(Z_1 + \frac{Gt^2}{6}\right) \sin\alpha\cos\lambda \\ \quad + \frac{r\omega^2}{2G}\left(Y_1 \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\varphi + X_1 \operatorname{tang}\varphi - Z_1 - \frac{Gt^2}{2}\right)\cos\alpha \sin 2\lambda, \\ y = Y_1 + \omega t\, X_1 \sin\lambda - \omega t \left(Z_1 + \frac{Gt^2}{6}\right) \cos\alpha\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2G}\left(X_1 \operatorname{tang}\varphi - Z_1 - \frac{Gt^2}{2}\right) \sin\alpha \sin 2\lambda, \\ z = Z_1 + \omega t\,(X_1 \sin\alpha + Y_1 \cos\alpha)\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2G}\, Y_1 \sin\alpha \sin 2\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda. \end{cases}$$

Il est bon de remarquer que le polynôme

$$X_1 \operatorname{tang}\varphi - Z_1 - \frac{Gt^2}{2}$$

est toujours une très-petite quantité. Dans la théorie balistique de Lombard, on le suppose toujours égal à zéro; car cette théorie est fondée sur l'hypothèse que le projectile emploie le même temps à parcourir sa trajectoire qu'à descendre d'une hauteur égale à son abaissement au-dessous de sa première direction.

Lorsque le projectile est une sphère homogène, ou composée de couches concentriques dont chacune est homogène, à laquelle on n'aurait imprimé aucune vitesse de rotation, à l'origine du mouvement, la trajectoire, sur la terre immobile,

sera une courbe plane ; alors Y sera constamment égal à zéro. La même chose arrivera si le boulet tourne autour d'un axe horizontal, perpendiculaire au plan de tir.

Alors, les équations de la trajectoire apparente, à double courbure, décrite en vertu du mouvement diurne, sont

$$[7]\quad \begin{cases} x = X - \omega t\left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\sin\alpha\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2G}\left(Z + \frac{Gt^2}{2}\right)\cos\alpha\sin 2\lambda, \\ y = \omega t X\sin\lambda - \omega t\left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\cos\alpha\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2G}\left(X\,\mathrm{tang}\,\varphi - Z - \frac{Gt^2}{2}\right)\sin\alpha\sin 2\lambda, \\ z = Z + \omega t X\sin\alpha\cos\lambda \\ \quad + \frac{r\omega^2}{2G}X\cos\alpha\sin 2\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda, \end{cases}$$

ou bien

$$[8]\quad \begin{cases} x = X_1 - \omega t\left(Z_1 + \frac{Gt^2}{6}\right)\sin\alpha\cos\lambda \\ \quad + \frac{r\omega^2}{2G}\left(X_1\,\mathrm{tang}\,\varphi - Z_1 - \frac{Gt^2}{2}\right)\cos\alpha\sin 2\lambda, \\ y = \omega t X_1\sin\lambda - \omega t\left(Z_1 + \frac{Gt^2}{6}\right)\cos\alpha\cos\lambda \\ \quad - \frac{r\omega^2}{2G}\left(X_1\,\mathrm{tang}\,\varphi - Z_1 - \frac{Gt^2}{2}\right)\sin\alpha\sin 2\lambda, \\ z = Z_1 + \omega t X_1\sin\alpha\cos\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda. \end{cases}$$

Dans les équations [7], x, y, z et X, Y, Z répondent à la même direction de la vitesse initiale, tant sur la terre en mouvement que sur la terre en repos: dans les équations [8], x, y, z et X_1, Y_1, Z_1 répondent au même angle de projection, soit que la terre tourne, soit qu'on la suppose en repos.

Appliquons les équations [7] au cas d'une résistance nulle. Dans le cas du vide, on a

$$X = at\cos\psi,$$
$$Z = at\sin\psi - \frac{Gt^2}{2},$$

en appelant $90° - \psi$ l'angle que fait la vitesse initiale a avec la verticale sur la terre immobile.

Si l'on met ces valeurs de X, Z dans les expressions de x, y, z [7], il vient

$$x = at\cos\psi - \omega t^2\left(a\sin\psi - \frac{Gt}{3}\right)\sin\alpha\cos\lambda$$
$$- \frac{ar\omega^2 t}{2G}\sin\psi\cos\alpha\sin 2\lambda,$$

$$y = a\omega t^2\cos\psi\sin\lambda - \omega t^2\left(a\sin\psi - \frac{Gt}{3}\right)\cos\alpha\cos\lambda$$
$$- \frac{ar\omega^2 t}{2G}(\cos\psi\,\mathrm{tang}\,\varphi - \sin\psi)\sin\alpha\sin 2\lambda,$$

$$z = at\sin\psi + a\omega t^2\cos\psi\sin\alpha\cos\lambda$$
$$- \frac{t^2}{2}(G - r\omega^2\cos^2\lambda) + \frac{ar\omega^2 t}{2G}\cos\psi\cos\alpha\sin 2\lambda.$$

En mettant pour $\sin\psi$ et $\cos\psi$ leurs valeurs en φ, pour

G sa valeur en g, et continuant à négliger les mêmes quantités qu'auparavant, il en résulte

$$x = at\cos\varphi - \omega t^2\left(a\sin\varphi - \frac{gt}{3}\right)\sin\alpha\cos\lambda,$$

$$y = a\omega t^2\cos\varphi\sin\lambda - \omega t^2\left(a\sin\varphi - \frac{gt}{3}\right)\cos\alpha\cos\lambda,$$

$$z = at\sin\varphi + a\omega t^2\cos\varphi\sin\alpha\cos\lambda - \frac{gt^2}{2}.$$

Ces équations coïncident avec celles que donne Poisson dans son Mémoire (N° 20).

Les équations [7] s'appliquent avec la plus grande facilité au tir vertical, soit de haut en bas, soit de bas en haut.

Lorsque le tir est vertical, la direction de la vitesse initiale est comprise dans le plan du méridien, et fait avec l'axe de Z un angle égal à θ; par conséquent, l'azimut du plan du tir est $\alpha = o$. D'après cela, les équations [7] deviennent

$$x = X - \frac{r\omega^2}{2G}\left(Z + \frac{Gt^2}{2}\right)\sin 2\lambda,$$

$$y = \omega t X\sin\lambda - \omega t\left(Z + \frac{Gt^2}{6}\right)\cos\lambda,$$

$$z = Z + \frac{r\omega^2}{2G}X\sin 2\lambda + \frac{r\omega^2 t^2}{2}\cos^2\lambda.$$

Dans ces équations x et y sont mesurées sur la *méridienne* et sur la *perpendiculaire* du point de départ.

Pour déterminer X et Z, en fonction de t, on doit faire attention que ces coordonnées répondent à un angle de projection θ, et qu'on a

$$\sin\theta = \frac{r\omega^2}{2G}\sin 2\lambda, \qquad \cos\theta = 1.$$

Nous allons appliquer ces expressions au cas d'une résistance nulle.

Lorsqu'un corps tombe dans le vide sans vitesse initiale, on a

$$X = o, \qquad Z = -\frac{Gt^2}{2};$$

donc

$$x = o,$$

$$y = \frac{G\omega t^3}{3}\cos\lambda,$$

$$z = -\frac{t^2}{2}(G - r\omega^2\cos^2\lambda) = -\frac{gt^2}{2}.$$

La valeur de y montre que la déviation du projectile, dans le sens du parallèle, se fera toujours vers l'est, ou dans le sens du mouvement vrai de la terre.

Si le projectile est lancé verticalement, de bas en haut, avec une vitesse donnée a, nous avons

$$X = at\sin\theta = \frac{ar\omega^2 t}{2G}\sin 2\lambda,$$

$$Z = at\cos\theta - \frac{Gt^2}{2} = at - \frac{Gt^2}{2};$$

donc en substituant, et négligeant $r\omega^3$, $\frac{r^2\omega^4}{G^2}$, il vient

$$x = o,$$

$$y = -\omega t^2 \left(a - \frac{gt}{3}\right) \cos\lambda,$$

$$z = at - \frac{gt^2}{2}.$$

L'équation

$$at - \frac{gt^2}{2} = o,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{2a}{g},$$

fera connaître le temps entier de l'élévation et de la chute du projectile. Il en résultera

$$y = -\frac{4a^3\omega}{3g^2}\cos\lambda.$$

Cette valeur de y montre que la déviation, dans le sens du parallèle, aura lieu vers l'ouest, et sera proportionnelle au cube de la vitesse de projection. La déviation, dans le sens du méridien, est nulle, au degré d'approximation auquel nous nous arrêtons, comme elle l'était dans le cas précédent de la chute d'un corps pesant.

Nous allons donner quelques applications numériques des équations que nous venons de trouver. Nous prendrons

$$g = 9^m,80517, \qquad \lambda = 45°;$$

ce sont à peu près les valeurs de la gravité et de la latitude à Turin : on a de plus

$$r = \frac{20000000}{\pi}, \quad \omega = \frac{2\pi}{86164}, \quad G = g + r\omega^2 \cos^2 \lambda = 9^m,8221.$$

Premier exemple.

En supposant la terre immobile, on trouve, au moyen des formules de la balistique, qu'un boulet de 12 livres françaises, lancé avec une vitesse de 488^m (correspondante à la charge du $\frac{1}{3}$ du poids du boulet), sous un angle dont la tangente est 0,01862, donne une portée de 600^m, et une durée du trajet de $1'',64$ (*). Il s'agit de trouver les coordonnées du boulet, au bout du même temps $1'',64$, en ayant égard au mouvement diurne de la terre.

En faisant dans les équations [7]

$$X = 600^m, \qquad Z = 0, \qquad t = 1'',64, \qquad \text{tang } \varphi = 0,01862,$$

on obtient

$$x = 600 - (0,0004) \sin \alpha - (0,0228) \cos \alpha,$$

$$y = 0,0507 - (0,0004) \cos \alpha + (0,0035) \sin \alpha,$$

$$z = 0,0228 + (0,0507) \sin \alpha + (1,0340) \cos \alpha,$$

pour les expressions de x, y, z, après $1'',64$.

(*) *Aide-Mémoire à l'usage des officiers d'artillerie.* 3e édition. Paris, 1856. p. 913. Les trois premiers exemples ont été calculés avec la valeur de la gravité apparente à Paris. En toute rigueur on aurait dû employer la valeur de l'attraction terrestre; mais les différences que produirait ce changement sont minimes et ne changeraient point la signification des résultats.

Quelle que soit la valeur de l'azimut α, la déviation latérale y du projectile provenant du mouvement de la terre, n'est pas assez considérable pour influer sur la justesse du tir. Les variations que subissent l'abscisse x, dans le sens du tir, et l'ordonnée z verticale, sont un peu plus considérables; mais si, au lieu de conserver invariable la direction de la vitesse initiale, on établissait la comparaison entre deux tirs exécutés chacun sous le même angle, avec sa verticale, les variations se réduiraient de beaucoup. La même observation s'applique aux exemples deuxième et troisième.

Deuxième exemple.

Lorsqu'on suppose la terre immobile, une bombe de $0^m,27$, lancée sous l'angle de 45°, avec une vitesse de 83^m, donne une portée de 600^m en $11'',49$ (*). Quelles sont les coordonnées de la bombe, au bout du temps $11'',49$, en ayant égard à la rotation de la terre?

Au moyen des équations [7] où l'on fait

$$X = 600^m, \qquad Z = 0, \qquad t = 11'',49, \qquad \varphi = 45°,$$

on trouve

$$x = 600 - (0,1280)\sin\alpha - (1,1173)\cos\alpha,$$

$$y = 0,3555 - (0,1280)\cos\alpha + (0,0833)\sin\alpha,$$

$$z = 1,1173 + (0,3555)\sin\alpha + (1,0340)\cos\alpha.$$

(*) Ibid., p. 919.

Si l'on donne à l'azimut différentes valeurs croissantes, on obtient, pour les déviations latérales y correspondantes, les valeurs suivantes :

$$\alpha = 0^\circ \quad , \quad y = 0^m,2275$$
$$\alpha = 90^\circ \quad , \quad y = 0\ ,4388$$
$$\alpha = 146^\circ\ 57' \quad , \quad y = 0\ ,5082 \text{ maximum}$$
$$\alpha = 180^\circ \quad , \quad y = 0\ ,4835$$
$$\alpha = 270^\circ \quad , \quad y = 0\ ,2722$$
$$\alpha = 326^\circ\ 57' \quad , \quad y = 0\ ,2028 \text{ minimum}$$
$$\alpha = 360^\circ \quad , \quad y = 0\ ,2275.$$

On voit par là que la déviation latérale, toujours à droite, croît avec l'azimut de 0° à 146° 57′ où elle atteint sa valeur maximum ; qu'elle va ensuite en décroissant jusqu'à 326° 57′ où elle atteint sa valeur minimum, pour croître ensuite de nouveau, jusqu'à 360°.

Troisième exemple.

En supposant la terre immobile, on a, d'après les théories balistiques, pour une bombe de $0^m,32$, projetée sous l'angle de 45°, avec une vitesse de 300^m,

$$X = 4606^m, \qquad t = 34'',82\ (*).$$

On demande les variations produites sur les coordonnées, par le mouvement diurne de la terre.

(*) Lombard. *Traité du mouvement des projectiles, appliqué au tir des bouches à feu.* Dijon, an V°, pag. 225.

Si l'on met pour X, t, dans les équations [7], les valeurs précédentes, il vient

$$x = 4606 - (3{,}5635)\sin\alpha - (10{,}2609)\cos\alpha,$$

$$y = 8{,}2697 - (3{,}5635)\cos\alpha + (2{,}3235)\sin\alpha,$$

$$z = 10{,}2609 + (8{,}2697)\sin\alpha + (7{,}9374)\cos\alpha.$$

La déviation latérale prend, pour diverses valeurs de l'azimut, les valeurs suivantes :

$\alpha = 0°$	,	$y = 4^{m},7062$	
$\alpha = 90°$	,	$y = 10\ ,5932$	
$\alpha = 146°\ 54'$	,	$y = 12\ ,5238$	maximum
$\alpha = 180°$	,	$y = 11\ ,8332$	
$\alpha = 270°$	,	$y = 5\ ,9462$	
$\alpha = 326°\ 54'$	,	$y = 4\ ,0156$	minimum
$\alpha = 360°$	,	$y = 4\ ,7062.$	

Ces déviations, quoique assez petites comparativement aux déviations dues aux causes accidentelles qui rendent le tir irrégulier, ne peuvent pas cependant être négligées complétement. En tirant dans la direction qui répond à la valeur maximum de la déviation, on pourrait, par une longue série d'expériences, exécutées avec soin, rendre sensible l'influence de la rotation terrestre.

Quatrième exemple.

On a trouvé, par expérience, qu'un canon de $0^m,16$ rayé, au pas de $3^m,77$, chargé de 3^k de poudre et d'un projectile oblong du poids de 30^k, tiré sous l'angle de $25°$, vers l'ouest-nord-ouest, ou dans l'azimut, de $292° 30'$, a donné une portée de 5000^m, une dérivation vers la droite de $221^m,8$, et une durée du trajet de $24''$. Quelles seraient les coordonnées du projectile, au bout du même temps, si la terre était immobile?

C'est le problème inverse des précédents: ici

$$x = 5000^m, \quad y = 221^m,8, \quad z = 0, \quad t = 24'', \quad \alpha = 292° 30',$$
$$\varphi = 25°.$$

D'après cela, en prenant

$$\lambda = 45°, \qquad g = 9^m,80517,$$

on trouve, au moyen des équations [5],

$$X = 5001^m,2287,$$

$$Y = 216^m,8434,$$

$$Z = -2^m,9199,$$

pour les coordonnées du projectile, lancé sous l'angle ψ, sur la terre en repos.

Dans un autre azimut quelconque α, les coordonnées du

projectile après 24″, sur la terre en mouvement, seraient, d'après les équations [4],

$$x = 5000{,}9603 - (0{,}9890)\sin\alpha - (4{,}8697)\cos\alpha,$$

$$y = 223{,}0325 - (1{,}1633)\cos\alpha + (0{,}8508)\sin\alpha,$$

$$z = 1{,}9548 + (5{,}8154)\sin\alpha + (8{,}8868)\cos\alpha.$$

Pour

$\alpha = 0°$,	on obtient	$y = 221^{m},87$	
$\alpha = 90°$,	»	$y = 223\ ,88$	
$\alpha = 112° 30'$,	»	$y = 224\ ,26$	
$\alpha = 143° 49'$,	»	$y = 224\ ,47$	maximum
$\alpha = 180°$,	»	$y = 224\ ,20$	
$\alpha = 270°$,	»	$y = 222\ ,18$	
$\alpha = 292° 30'$,	»	$y = 221\ ,80$	fourni par l'expérience
$\alpha = 323° 49'$,	»	$y = 221\ ,59$	minimum
$\alpha = 360°$,	»	$y = 221\ ,87$.	

Donc, si l'on tirait le canon dans la direction est-sud-est, ou dans une direction opposée à celle de l'expérience citée ci-dessus, on observerait une dérivation plus grande de $2^{m},46$.

Deux tirs exécutés, l'un dans l'azimut de 143° 49′, et l'autre dans celui de 323° 49′, donneraient des dérivations dont la différence serait $2^{m},88$.

Eu égard à la grande justesse du tir des canons rayés, il paraît qu'on devrait pouvoir apprécier ces différences de dérivation dans les moyennes de longues séries d'épreuves.

Les exemples, dont nous venons de donner le calcul numérique, montrent qu'en vertu de la rotation de la terre, les projectiles, lancés vers un point quelconque de l'horizon, éprouvent, à nos latitudes, une déviation qui a lieu constamment vers la droite de l'observateur placé au point de départ et tourné vers la trajectoire. Cette déviation ne varie pas beaucoup, lorsque le tir a lieu successivement dans différents plans verticaux: elle atteint une valeur maximum pour une direction du tir comprise entre le sud et l'est, et une valeur minimum pour une direction opposée.

La déviation aurait lieu vers la gauche, dans l'hémisphère austral, où la latitude λ est négative.

On sait que les projectiles, lancés par les armes à feu rayées de gauche à droite, éprouvent toujours une déviation latérale vers la droite, déviation qui est une conséquence du sens ordinaire des rayures. Cette déviation s'ajoute à celle qui est due au mouvement diurne, et, dans les armes portatives, à la déviation due au mouvement du corps du tireur, par suite de la pression que l'arme exerce sur son épaule, au moment du tir.

On voit donc qu'il serait préférable de rayer le canon des armes à feu dans un sens opposé, c'est-à-dire de droite à gauche; alors la déviation produite par la rotation du projectile aurait lieu vers la gauche, et serait diminuée par les déviations dues aux mouvements de la terre et du tireur.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES.

AVERTISSEMENT . . . . . pag. v

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES SPHÉRIQUES.

Analyse du Mémoire, par M. Adolphe Parodi . . pag. 3

Du mouvement des projectiles sphériques dans les milieux résistants . . . . . » 25

PRÉFACE . . . . . » 25

CHAP. I. — *Équations générales du mouvement d'un projectile sphérique dans un milieu résistant . . . » 31*

N° 1. Considérations préliminaires. . . . . » 31

N° 2. Équations générales indépendantes de toute hypothèse sur la loi de la résistance . . . . . » 34

CHAP. II. — *Du mouvement rectiligne* . . . . . » 43

N° 3. Mouvement d'un corps dans un milieu de densité égale à la sienne . . . . . » 43

N° 4. Mouvement vertical ascendant . . . . . » 50

N° 5. Mouvement vertical descendant . . . . . » 63

CHAP. III. — *Discussion de la trajectoire* . . . . pag. 68

N° 6 Variations de la vitesse aux différents points de la trajectoire . . . . . » 68

N° 7. Limites de l'inclinaison de la courbe . . . » 74

N° 8. Temps après lequel la vitesse devient infinie, nulle, minimum, constante . . . . . » 78

N° 9. Longueur de l'arc qui correspond à la vitesse infinie, nulle, minimum, constante. . . . . » 81

N° 10. Des asymptotes . . . . . » 83

N° 11. Du rayon de courbure. Point du maximum de courbure. Ce point est plus voisin du sommet que le point, où le minimum de vitesse a lieu. . . . . » 87

N° 12. La vitesse et le rayon de courbure, pour des inclinaisons égales de la courbe, sont plus grands dans la branche ascendante que dans la branche descendante. » 89

N° 13. L'angle de chute est toujours plus grand que l'angle de projection. . . . . » 90

N° 14. La vitesse au point de chute est moindre qu'au point de départ. . . . . » 91

N° 15. L'amplitude de la branche ascendante est plus grande que celle de la branche descendante. . . . . » 92

CHAP. IV. — *Analyse de deux cas dans lesquels les équations du mouvement des projectiles se ramènent aux quadratures* . . . . . » 94

N° 16. Résistance proportionnelle à une puissance quelconque de la vitesse, plus une constante . . . . » 94

N° 17. Cas dans lesquels on peut obtenir en termes finis les éléments du mouvement . . . . . » 101

N° 18. Relation entre les temps dans deux milieux dont les résistances sont exprimées par a et $a + bu$ . . » 103

N° 19. Correspondance entre les deux trajectoires décrites dans deux milieux dont les résistances sont exprimées par a et $a + bu^2$. . . . . pag. 105

N° 20. Réduction aux quadratures du cas dans lequel la résistance est exprimée par $a + b \log u$ . . . » 107

CHAP. V. — *Méthodes d'approximation* . . . . . » 108

N° 21. Première méthode d'approximation applicable à un angle quelconque de projection. Degré d'approximation. » 108

N° 22. Construction graphique de la trajectoire . . » 118

N° 23. Seconde méthode d'approximation pour le tir sous de petits angles . . . . . » 119

N° 24. Troisième méthode d'approximation au moyen des séries . . . . . » 125

CHAP. VI. — *Applications au tir des projectiles de l'artillerie.* » 131

N° 25. Résistance des milieux, dans lesquels se meuvent ordinairement les projectiles de l'artillerie . . » 131

N° 26. Problèmes principaux de balistique, qui se présentent dans la pratique . . . . . » 138

N° 27. Pénétration des projectiles dans les milieux solides. » 139

N° 28. Formules pour le tir de plein-fouet . . . » 142

N° 29. Tir courbe . . . . . » 149

NOTE — *Calcul numérique d'un cas particulier. Comparaison des différentes méthodes d'approximation* . » 153

Application des formules du N° 21 au calcul de la trajectoire d'une bombe de $0^m,22$, lancée avec une vitesse de 120^m et sous l'angle de 45° . . . . . » 153

Degré d'approximation . . . . . » 160

Résultats qu'on obtient à l'aide des tables de M. OTTO. » 166

Résultats fournis par la méthode de M. DIDION . . » 167

Calcul séparé de la branche ascendante et de la branche descendante, par la méthode de LEGENDRE . . pag. 168

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES OBLONGS.

Préface . . . . . pag. 173

Du mouvement des projectiles oblongs . . . . » 179

PREMIÈRE PARTIE . . . . . » 179

I. Les formules ordinaires de la balistique, établies pour les projectiles sphériques, ne sont point applicables au tir des projectiles allongés. . . . . » 181

II. Formules à employer pour calculer la trajectoire des projectiles oblongs. . . . . » 185

Mouvements d'un cylindre droit, dont le centre de gravité est sur l'axe, tournant autour de son axe, lancé dans l'air dans la direction du même axe. . . . . » 195

Comparaison de ce mouvement avec celui des projectiles réels. . . . . » 204

SECONDE PARTIE . . . . . » 209

I. Un projectile cylindrique, dont le centre de gravité est au milieu de l'axe, doué d'un mouvement de rotation autour du même axe, étant lancé dans l'air avec une vitesse donnée, dans une direction quelconque, déterminer son mouvement. . . . . » 210

II. Un solide de révolution, qui a reçu une très-grande vitesse de rotation autour de son axe de figure, est lancé dans l'air. On propose de déterminer le mouvement. » 216

NOTE A. Solution analytique du problème du mouvement d'un corps de révolution autour de son centre de gravité. » 239

NOTE *B*. Réfutation de la théorie qui fait dépendre la dérivation du frottement de l'air . . . . . pag. 246

NOTE *C*. Résistance oblique de l'air sur une surface de révolution . . . . . » 251

Du mouvement des projectiles lancés par les armes à feu rayées . . . . . » 277

AVANT-PROPOS . . . . . » 277

CHAP. I. *Composition des mouvements de rotation.* . » 279

CHAP. II. *Décomposition du mouvement de translation.* » 294

CHAP. III. *Solution du problème du mouvement des projectiles des armes à feu rayées.* . . . . . » 296

CHAP. IV. *Similitude des trajectoires* . . . . . » 313

NOTE. *Sur le centre de résistance d'un cylindre droit.* » 329

DU MOUVEMENT DES PROJECTILES QUELCONQUES.

Préface . . . . . pag. 333

Théorème sur la similitude des trajectoires que décrivent les projectiles dans les milieux résistants. Applications au tir des armes à feu. . . . . » 335

THÉORÈME. . . . . » 335

APPLICATIONS . . . . . » 352

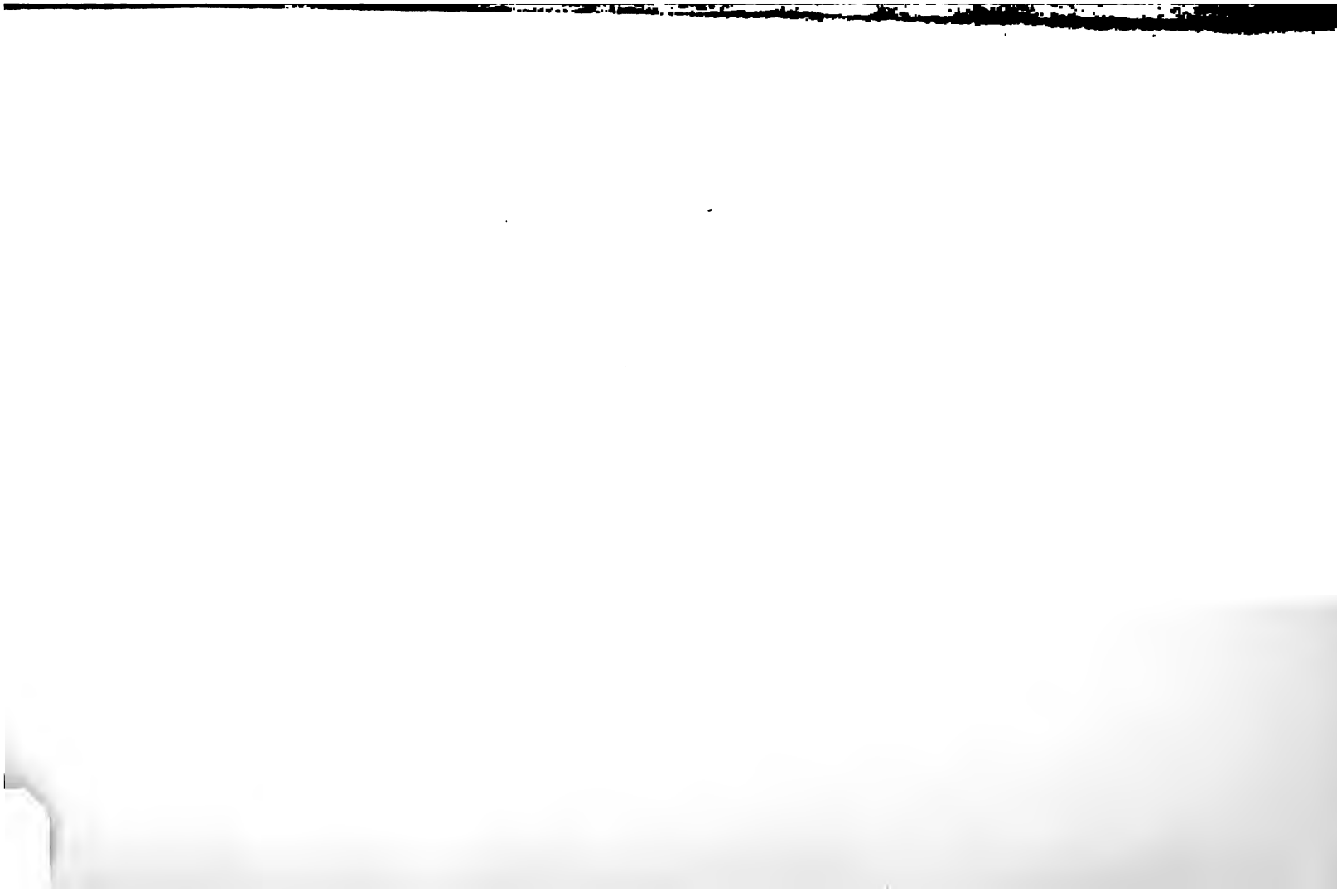
Des effets de la rotation de la terre sur le mouvement des projectiles . . . . . » 357

Explication géométrique des effets produits par le mouvement diurne de la terre. . . . . . » 359

Tir au pôle, dans une direction quelconque . . . pag. 362
Tir à l'équateur dans le plan du méridien . . . » 363
Tir à l'équateur et dans son plan . . . . . » 365
Tir à une latitude et dans une direction quelconques . » 367
Calcul des effets produits par le mouvement diurne de la terre . . . . . » 371
Tir au pôle . . . . . » 373
Tir à l'équateur, dans le plan du méridien . . . » 373
Tir dans le plan de l'équateur. . . . . » 377
Tir à une latitude et dans une direction quelconques . » 377
Applications numériques . . . . . » 397

Fin de la table des matières du tome premier.

PRIX : 8 francs.



3 2044 004 466 850